ЛЕКЦИЯ 16

ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА ДВУДОЛЬНОГО ЧИСЛА РАМСЕЯ

1. Вспомогательные утверждения

Эта лекция будет целиком посвящена доказательству теоремы о верхней оценке двудольного числа Рамсея.

Для начала необходимо доказать несколько вспомогательных утверждений «турановского» типа.

Рассматривается полный двудольный граф $K_{n,m}$. Возьмем в нем произвольный подграф G, имеющий плотность не меньше, чем p, причем:

$$p \in [0, 1].$$

В данном случае под плотностью понимается следующее:

$$p = \frac{|E(G)|}{nm}.$$

Хочется понять и сформулировать в качестве утверждения, при какие условиях можно гарантировать наличие в графе G подграфа $K_{r,s}$ — полного двудольного подграфа с долями r и s соответственно. Нетрудно заметить, что в таком случае как раз получился бы «турановский» результат.

Тогда первое утверждение будет выглядеть следующим образом:

Утверждение 13 Если выполнено условие:

$$mC_{np}^{r} > C_{r}^{r}(s-1),$$

то граф G содержит в себе $K_{r,s}$. $*$

Замечание Подразумевается полное соответствие между долями: r соответствует n, s соответствует m, то есть нужно, чтобы $K_{r,s}$ имел долю размера r в той доле $K_{n,m}$, которая имела размер n. Аналогично соответствуют s и m. $*$

Док-во: На рисунке 16.1 показаны две доли, условно говоря — верхняя и нижняя, отвечающие параметрам n и m. Имеется какой-то неполный подграф G. Он обладает достаточно высокой плотностью p.

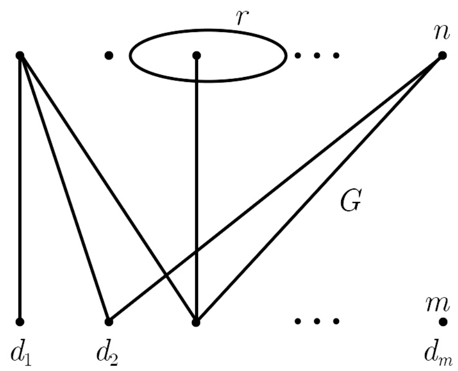

Рис. 16.1

Предположим, что в графе G нет подграфа $K_{r,s}$. Тогда посчитаем количество подграфов $K_{r,1}$ в G.

Введем обозначения: $d_1, \dots, d_m$ — это степени вершин из нижнего слоя в графе G. Тогда количество графов $K_{r,1}$ — это сумма:

$$C_{d_1}^r + \dots + C_{d_m}^r.$$

Количество способов выбрать «дольку» размера r в верхнем слое — C_n^r. При зафиксированной «дольке» размера r из верхнего слоя видно, что она может породить не больше, чем $s-1$ графов $K_{r,1}$.

Тогда:

$$C_{d_1}^r + \dots + C_{d_m}^r \leqslant C_n^r(s-1). \tag{16.1}$$

Получается, что неравенство 16.1 выполнено, если в графе G нет $K_{r,s}$.

Следовательно, обратное неравенство выполнено, когда в графе G есть $K_{r,s}$. Запишем это неравенство:

$$C_{d_1}^r + \dots + C_{d_m}^r > C_n^r(s-1).$$

Тогда оценим снизу сумму:

$$C_{d_1}^r + \dots + C_{d_m}^r \geqslant m \cdot C^r_{\frac{d_1 + \dots + d_m}{m}}. \tag{16.2}$$

Из приведенной оценки для суммы видно, что утверждается, что имеется некая выпуклость биноминального коэффициента.

Так как:

$$\frac{d_1 + \dots + d_m}{m}$$

может оказаться нецелым числом, встает вопрос, как посчитать правую часть в неравенстве 16.2.

В качестве пояснения будет напомнено определение:

$$C_a^b = \frac{a \cdot (a-1) \cdot \ldots \cdot (a-b+1)}{b!}.$$

Учитывая данное пояснение, производство неравенства 16.2 остается в качестве упражнения «со звездочкой».

Таким образом, получился желаемый результат:

$$mC_{np}^r > C_r^r(s-1),$$

и утверждение можно считать доказанным. ∎

Теперь необходимо перейти к асимптотике.

Пусть:

$$n = n(k), \quad m = m(k), \quad r = r(k), \quad s = s(k).$$

Потребуем также, чтобы все эти функции от k стремились к бесконечности при $k \to \infty$:

$$k \to \infty: \ n(k) \to \infty, \quad m(k) \to \infty, \quad r(k) \to \infty, \quad s(k) \to \infty.$$

Значит, для каждого отдельно взятого k есть свой $K_{n,m}$, в нем есть свой G с плотностью p.

Потребуем, чтобы:

$$r^2(k) = \overline{\overline{o}}(n(k)).$$

Тогда:

$$C_n^r \sim \frac{n^r}{r!}, \quad C_{np}^r \sim \frac{(np)^r}{r!}.$$

Получим асимптотическое утверждение:

Утверждение 14 Если:

$$m > (s-1) \cdot p^{-r} \cdot (1 + o(1)),$$

то при достаточно больших k в G с гарантией есть $K_{r,s}$. *

Именно этот результат будет использоваться, причем дважды, при доказательстве теоремы о верхней оценке двудольного числа Рамсея.

Доказав вспомогательные утверждения, можно перейти к доказательству самой теоремы.

2. Теорема о верхней оценке двудольного числа Рамсея

Теорема 57

$$b(k,k) \leqslant (1 + o(1)) \cdot \log_2 k \cdot 2^{k+1}.$$

Док-во: Введем обозначение:

$$l = (1 + o(1)) \cdot \log_2 k \cdot 2^{k+1}.$$

Рассмотрим полный двудольный подграф $K_{l,l}$.

Цель: доказать, что при всех больших k в любой раскраске $K_{l,l}$ в красный и синий цвета есть одноцветный $K_{k,k}$.

Зафиксируем раскраску ребер графа $K_{l,l}$. На рисунке 16.2 показано, что в верхней и нижней долях сейчас по l вершин.

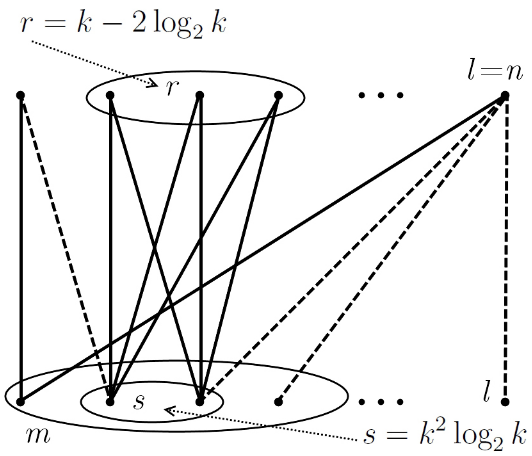

Рис. 16.2

Сплошные линии на приведенном рисунке означают красные ребра, а прерывистые — синие.

Таким образом, из любой вершины нижнего слоя выходит какое-то количество красных ребер и какое-то количество синих ребер при данной зафиксированной раскраске.

Вершина из нижнего слоя — красная, если количество из нее выходящих красных ребер не меньше, чем количество аналогичных синих.

Точно так же, вершина из нижнего слоя — синяя, если количество из нее выходящих синих ребер не меньше, чем количество аналогичных красных.

Какова бы ни была фиксированная раскраска, вершин какого-то цвета в нижнем слое наверняка не меньше, чем вершин другого цвета.

Без ограничения общности будем считать, что больше красных вершин. Тогда будем говорить, что красные вершины *преобладают* над синими при данной раскраске.

Нетрудно заметить, что в таком случае красных вершин не меньше, чем $\frac{l}{2}$. На рисунке 16.2 условно и опять же без ограничения общности выделено множество красных вершин (множество m). Видно, что длина такого множетсва также не меньше, чем $\frac{l}{2}$.

Теперь перейдем к рассмотрению графа G, состоящий из прежней верхней доли из l вершин и с новой нижней долей, состоящей только из красных вершин (на приведенном рисунке это множество m). Очевидно, что все ребра рассматриваемого множества — красные.

Далее рассмотрим:

$$K_{n,m} \subset K_{l,l},$$

у которого $n = l$, а m есть мощность красной «сардельки» (множества, состоящего из красных вершин). В таком множестве у графа G:

$$p \geqslant \frac{1}{2}.$$

Применим к такому $K_{n,m}$ и к графу G утверждение 14, считая k достаточно большим. Рассмотрим:

$$r = k - 2log_2 k,$$

$$s = k^2 \log_2 k.$$

Тогда для левой части неравенства из утверждения 14 выполняются следующие асимптотические равенства:

$$r^2 \sim k^2 = \overline{\overline{o}}(n),$$

$$m \geqslant \frac{l}{2} \sim log_2 k \cdot 2^k.$$

Теперь распишем аналогично правую часть неравенства из утверждения 14:

$$s - 1 \sim k^2 \cdot \log_2 k \cdot 2^r = \frac{k^2 \cdot \log_2 k \cdot 2^k}{k^2} = \log_2 k \cdot 2^k.$$

Асимптотически все получается желаемым образом.

Вывод: так как смогли применить неравенство из утверждения 14, то в графе G есть $K_{r,s}$.

Заметим, что на рисунке 16.2 полный граф $K_{r,s}$ состоит только из красных ребер.

Применим утверждение 14 к еще одной аналогичной конструкции. Заметим, что, как и оговаривалось ранее, для доказательства данной теоремы недостаточно однократного применения утверждения 14.

Рассмотрим:

$$n = k^2 \cdot \log_2 k,$$

$$m = l - (k - 2\log_2 k).$$

Рассмотрим далее граф $K_{n,m}$, в нем рассмотрим подграф G, состоящий только из красных ребер. Тогда:

$$p = \left(\frac{1}{2 - \frac{k}{l}}\right).$$

Возьмем:

$$r = k, \quad s = 2\log_2 k.$$

Снова запишем неравенство из утверждения 14, на этот раз — с данными параметрами r и s.

Левая часть неравенства расписывается следующим образом (по аналогии с уже проделанными выкладками для графа G и $K_{n,m}$):

$$m \sim 2^{k+1} \cdot \log_2 k.$$

Аналогично с учетом асимптотик распишем правую часть неравенства:

$$s - 1 \sim 2\log_2 k \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{k}{2^{k+1}}\right) \sim 2 \cdot \log_2 k \cdot 2^k = 2^{k+1}\log_2 k.$$

Следовательно, получается итоговое неравенство:

$$2^{k+1} \cdot \log_2 k > 2^{k+1} \cdot \log_2 k(1 + o(1)),$$

а с учетом произвольности выбора малой функции очевидно, что неравенство получается верным.

Теорема доказана. ■