
ЛЕКЦИЯ 14

ИЗЛУЧЕНИЕ. ЧАСТЬ 2

На прошлой лекции было получено выражение для дифференциальной интенсивности дипольного излучения:

$$dI = \frac{|\ddot{\vec{d}}|^2 \sin^2 \alpha d\Omega}{c^3 4\pi}. \quad (14.1)$$

Было также показано, что полная интенсивность имеет вид:

$$I = \frac{2}{3} \frac{|\ddot{\vec{d}}|^2}{c^3}.$$

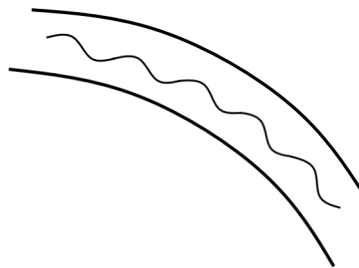


Рис. 14.1

Из этого выражения следует, что интенсивность тем больше, чем больше модуль второй производной дипольного момента $|\ddot{\vec{d}}|$.

В ускорителях, где быстрые электроны испускают рентгеновское или, при бóльших энергиях, γ -излучение для увеличения интенсивности используются специальные устройства (см. рис. 14.1).

В ускорителе магнитное поле создается так, чтобы частицы двигались по траектории (1) — «змейке». Этот эксперимент был впервые проведен в Новосибирске и получил название «siberian snake».

Другое устройство, над которым в настоящий момент работают многие ученые — лазер на свободных электронах. Одним из примеров подобного устройства является ондулятор (см. рис. 14.2).

Вдоль его стенок последовательно расположены магниты с противоположной поляр-



Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

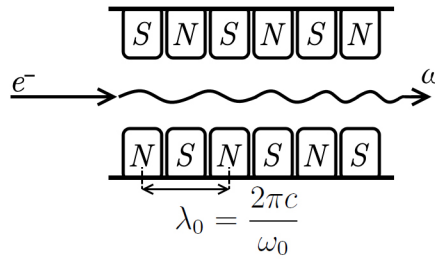


Рис. 14.2

ностью. Благодаря этому сквозь ондулятор происходит ускоренное движение электронов, и частота на выходе связана с частотой смены магнитных полюсов следующим соотношением:

$$\omega = \frac{\omega_0 + \frac{v}{c}\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Следовательно, при движении электронов сквозь ондулятор может быть получена большая частота излучения.

1. Угловое распределение интенсивности синхротронного излучения. Длина когерентности.

В прошлый раз было рассмотрено излучение ультрарелятивистской частицы — синхротронное излучение. Было также сформулировано условие дипольного приближения: для всех частиц системы

$$v \ll c.$$

Для системы, состоящей из одной частицы, всегда можно выбрать систему координат K' , в которой эта частица покоится и вычислить в ней излучение.

На прошлой лекции было получено, что полное излучение в лабораторной системе координат оказывается равным излучению в системе координат K' :

$$I' = I. \quad (14.2)$$

В частности, полная интенсивность синхротронного излучения примет вид:

$$I = \frac{2}{3} r_0^2 \left(\frac{P_{\perp}}{mc} \right)^2 H^2 c. \quad (14.3)$$

В этом выражении

$$r_0 = \frac{e^2}{mc^2}, \quad (14.4)$$

где r_0 — классический радиус электрона.

Из выражения (14.3) видно, что

$$I \sim P_{\perp}^2 H^2, \quad (14.5)$$

поэтому потери на синхротронное излучение оказываются очень большими.

Чтобы уменьшить эти потери и, как следствие, получить большие энергии, надо



Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

! Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

увеличить радиус орбиты частицы (радиус ускорителя).

$$R = \frac{cP_{\perp}}{eH}, \quad (14.6)$$

Выражение (14.6) показывает, что при увеличении радиуса орбиты частицы магнитное поле H будет уменьшаться. Выражение (14.5) можно записать в следующем виде:

$$I \sim \frac{P_{\perp}^4}{R^2}.$$

Бесконечное увеличение радиуса невозможно с технической точки зрения. Последний работавший коллайдер — LEP (электрон-позитронный коллайдер), в туннелях которого сейчас находится LHC (протон-протонный коллайдер).

Длина вакуумной камеры LEP достигала

$$2\pi R \approx 27 \text{ км},$$

а энергия достигала

$$P_{\perp}c \sim 100 \text{ ГэВ}.$$

Коллайдер большего размера очень сложно построить технически, поэтому следующее поколение коллайдеров, по-видимому, — это линейные коллайдеры. Концепция линейного коллайдера была разработана в Новосибирском отделении академии наук.

Рассмотрим угловое распределение излучения ультрарелятивистской частицы на примере синхротронного излучения. Пусть есть некоторая напряженность магнитного поля \vec{H} , вокруг силовой линии которого движется положительно заряженная частица со скоростью

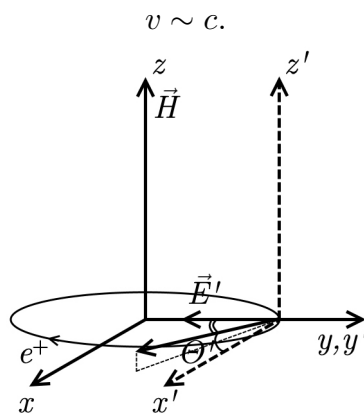


Рис. 14.3

Выберем систему координат K так, чтобы ось z совпадала с направлением магнитного поля \vec{H} , а систему K' свяжем с движущейся частицей в момент времени, когда оси y и y' совпадают, а начало координат системы K' находится в точке пересечения орбиты частицы с осью y (см. рис. 14.3).

Найдем излучение в системе K' . В этой системе частица покоится, а излучение происходит за счет ускорения. Если скорость

$$\vec{v} = 0,$$

! Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu



Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

значит магнитное поле на частицу не действует.

Следовательно, на эту частицу действует электрическое поле, которое, вследствие преобразования полей, имеет следующий вид

$$E'_y = -\gamma H \frac{v}{c} = -\gamma \frac{mv}{mc} H = -\frac{P_\perp H}{mc}$$

Вторая производная дипольного момента имеет вид

$$\ddot{\vec{d}} = e\ddot{\vec{r}} = e\frac{e\vec{E}'}{m} \Rightarrow |\ddot{\vec{d}}|^2 = \frac{e^4}{m^2} \left(\frac{P_\perp}{mc}\right)^2 \cdot H^2. \quad (14.7)$$

Рассмотрим угловое распределение интенсивности. Будем искать излучение, направленное под углом θ' к направлению частицы в выбранный момент времени. Следовательно, θ' — угол в системе координат K' , в которой частица покоится.

Согласно (14.1), дифференциальная интенсивность зависит от угла между направлением излучения и направлением второй производной дипольного момента.

Связь между дифференциальной интенсивностью в лабораторной и собственной системе координат отличается от выражения для интегральной интенсивности (14.2).

Пусть за время Δt в неподвижной системе K происходит излучение энергии $\Delta\varepsilon$ в определенный угол. Согласно преобразованиям энергии:

$$\Delta\varepsilon = \frac{\Delta\varepsilon' + v\Delta P'_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta\varepsilon' + v\frac{\Delta\varepsilon'}{c} \cos\theta'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

поскольку

$$\Delta P'_x = \frac{\Delta\varepsilon'}{c} \cos\theta'.$$

Согласно преобразованиям Лоренца для времени:

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

так как в собственной системе координат K' перемещение частицы $\Delta x' = 0$.

Таким образом, дифференциальная интенсивность в неподвижной системе координат K связана с дифференциальной интенсивностью в движущейся системе K' следующим соотношением:

$$dI = \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta t} = \frac{\Delta\varepsilon'}{\Delta t'} \left(1 + \frac{v}{c} \cos\theta'\right) = dI' \left(1 + \frac{v}{c} \cos\theta'\right), \quad (14.8)$$

где θ' — введенный ранее угол между направлением частицы и направлением излучения в движущейся системе координат.

Ранее на лекциях было найдено преобразование угла из движущейся системы координат в неподвижную:

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cos\theta}.$$



Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

! Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

Подставляя это выражение в (14.8), получим

$$dI = dI' \left(1 + \frac{v \cos \theta - \frac{v}{c}}{c \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right)} \right) = dI' \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}, \quad (14.9)$$

где dI' — дифференциальная интенсивность в системе, где частица покоится.

С другой стороны, дифференциальная интенсивность dI' определяется выражением (14.1). Подставляя выражение (14.1) в (14.9), с учетом (14.7), получим:

$$dI = r_0^2 \left(\frac{P_{\perp}}{mc} \right)^2 H^2 c \frac{d\Omega'}{4\pi} \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta} \sin^2 \alpha.$$

Телесный угол в движущейся системе координат связан с телесным углом в неподвижной следующим соотношением:

$$d\Omega' = d(\cos \theta') d\phi = \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right)^2} d\Omega.$$

Следовательно, дифференциальная интенсивность в лабораторной системе координат примет вид:

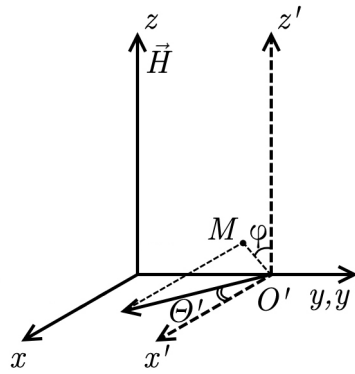


Рис. 14.4

$$dI = r_0^2 \left(\frac{P_{\perp}}{mc} \right)^2 H^2 c \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^2}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right)^3} \sin^2 \alpha \frac{d\Omega}{4\pi}. \quad (14.10)$$

Найдем величину $\sin^2 \alpha$. Спроецировав отрезок, выходящий из точки O' под углом θ' на плоскость $z'y$ увидим, что проекция получившегося отрезка $O'M$ на ось y и есть искомый отрезок (см. рис. 14.4). Таким образом,

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \sin \theta' \sin \phi \quad \Rightarrow \quad \sin^2 \alpha = 1 - \sin^2 \theta' \sin^2 \phi = \\ &= 1 - (1 - \cos^2 \theta') \sin^2 \phi = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi \cos^2 \theta'. \end{aligned}$$

Окончательно, выражение для дифференциальной интенсивности (14.10) примет вид:

$$dI = r_0^2 \left(\frac{P_{\perp}}{mc} \right)^2 H^2 c \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^2}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right)^3} \left(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi \left(\frac{\cos \theta - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta} \right)^2 \right) \frac{d\Omega}{4\pi}. \quad (14.11)$$

! Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu



Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

Выражение (14.11) — точная формула для углового распределения синхротронного излучения. При $v \sim c$

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \simeq \frac{1}{2(1 - \frac{v}{c})}, \quad (14.12)$$

следовательно

$$1 - \frac{v}{c} \cos \theta \approx 1 - \frac{v}{c} + \frac{v}{c} \frac{\theta^2}{2} = \left(1 - \frac{v}{c}\right) (1 + \gamma^2 \theta^2).$$

В этом случае

$$\frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)^3} = \frac{\left(1 + \frac{v}{c}\right)^2}{\left(1 + \gamma^2 \theta^2\right)^3 \left(1 - \frac{v}{c}\right)} = \frac{8\gamma^2}{\left(1 + \gamma^2 \theta^2\right)^3}. \quad (14.13)$$

Таким образом, из выражения (14.13) видно, что интенсивность излучения резко падает с увеличением угла θ , то есть максимум интенсивности излучения совпадает с направлением движения позитрона.

Таким образом, особенность излучения ультррелятивистской частицы состоит в том, что излучение происходит в узком конусе в направлении движения частицы.

Найдем частотное распределение синхротронного излучения. Теория синхротронного излучения очень хорошо развита с математической точки зрения: для ее построения используются функции Бесселя дробного аргумента, а также функции Бесселя мнимых аргументов.

Приведем лишь качественные соображения, которые, тем не менее, помогут установить вид частотного распредел

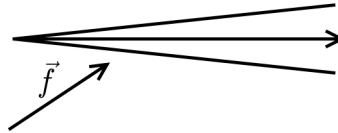


Рис. 14.5

Для этого необходимо ввести понятие **длины когерентности**, то есть длины формирования излучения. Пусть релятивистская частица движется со скоростью

$$v \sim c,$$

и пусть на нее действует некоторая сила \vec{f} , в результате чего возникает излучение, распространяющееся в узком конусе, направленном вдоль направления движения частицы, со скоростью света c (см. рис. 14.5).

Частица распространяется со скоростью, близкой к скорости света, поэтому в некоторой области электромагнитное поле частицы и электромагнитное поле излучения расположены очень близко друг к другу, поэтому считать, что излучение произошло, нельзя.

Будем считать, что излучение произошло, когда электромагнитное поле излучения «оторвалось» от поля частицы. Это произойдет, когда излучение обгонит частицу на половину длины волны (разность фаз в этом случае оказывается равна π). Следовательно,

$$(c - v)\Delta t = \frac{\lambda}{2} \quad (14.14)$$



Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

7 ! Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

С учетом (14.14) длина когерентности примет вид:

$$l_{\text{ког}} = c\Delta t = \frac{c\lambda}{2(c-v)} = \lambda\gamma^2,$$

так как, согласно (14.12)

$$\frac{c}{2(c-v)} = \frac{1}{2(1-\frac{v}{c})} = \gamma^2.$$

Пусть в ускорителе движется электрон (см. рис. 14.6). Найдем, на какой длине волны происходит излучение в определенный угол.

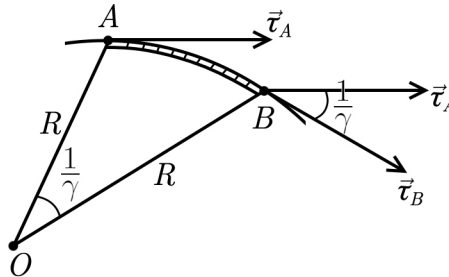


Рис. 14.6

Ранее на лекциях было получено, что

$$\theta \sim \frac{1}{\gamma},$$

то есть угол между двумя направлениями должен быть равен $\frac{1}{\gamma}$.

Угол между двумя направлениями, очевидно, равен углу, опирающемуся на дугу AB окружности. Длина дуги определяется следующим соотношением:

$$L = R\frac{1}{\gamma}.$$

Возможны несколько различных соотношений между длиной дуги L и длиной когерентности $l_{\text{ког}}$.

1. $L \gg l_{\text{ког}}$;
2. $L < l_{\text{ког}}$.

В первом случае дугу AB можно разбить на множество маленьких отрезков, в каждом из которых фаза излучения отличается на π . Интерференция излучения таких отрезков, по-видимому, обратит суммарное излучение в ноль: каждый из отрезков излучает в противофазе к двум соседним.

В курсе оптики изучались зоны Френеля: излучение распространяется прямолинейно, поскольку зоны Френеля, отличающиеся друг от друга по фазе на π , компенсируют друг друга. Не компенсируется лишь центральная зона.

Таким образом, при $L \gg l_{\text{ког}}$ интенсивность излучения должна падать.

! Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

Во втором случае, при $L < l_{\text{кор}}$, излучение полностью не успеет сформироваться, поэтому интенсивность его будет меньше некоторого максимального значения.

Следовательно, максимум интенсивности будет достигаться, когда

$$l_{\text{кор}} = L \Rightarrow \lambda_{\text{min}} \gamma^2 \sim R \frac{1}{\gamma}.$$

Радиус орбиты, согласно (14.6), известен. Следовательно, λ_{min} примет следующий вид:

$$R = \frac{cP_{\perp}}{eH} \Rightarrow \lambda_{\text{min}} \sim R \frac{1}{\gamma^3} = \frac{cP_{\perp}}{eH} \frac{1}{\gamma^3}. \quad (14.15)$$

Частота излучения связана с длиной волны следующим соотношением:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{2\pi c}{\omega} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi c}{\lambda}.$$

Тогда, согласно (14.15), максимальная частота излучения оказывается равной по порядку величины:

$$\omega_{\text{max}} \sim \frac{c}{R} \gamma^3 = \frac{ceH}{cP_{\perp}} \gamma^3 = \frac{eH}{P_{\perp}} \gamma^3. \quad (14.16)$$

По определению, в ультрарелятивистском случае, при $v \sim c$:

$$P_{\perp} = mv\gamma \simeq mc\gamma.$$

Подставляя выражение для P_{\perp} в (14.16), получим:

$$\omega_{\text{max}} \simeq \frac{eH}{mc} \gamma^2. \quad (14.17)$$

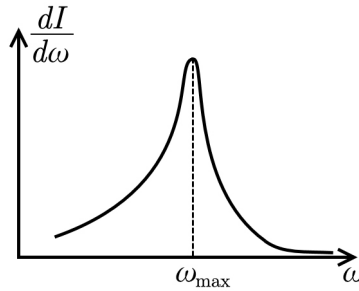


Рис. 14.7

Если построить график зависимости $\frac{dI}{d\omega}(d\omega)$, то до ω_{max} наблюдался бы рост, а после — резкий спад (см. рис. 14.7).

Пусть пучок электронов имеет энергию 1 ГэВ, тогда $\gamma = 2000$. Пусть напряженность магнитного поля в ускорителе достигает величины $H = 10^3$ Гс. Остальные величины в (14.17) известны, поэтому длина волны окажется порядка

$$\lambda_{\text{min}} \sim 10 \cdot 10^{-9} - 100 \cdot 10^{-9} \text{ см.}$$

Таким образом, синхротронное излучение — идеальный способ получения рентгеновского излучения. Другой хороший способ — лазер на свободных электронах, однако его разработка на сегодняшний день еще не завершена.

! Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

В действительности, пик на рисунке 14.7 очень узкий, поэтому излучение — практически монохроматическое жесткое рентгеновское излучение, причем электроны из установки не исчезают, поэтому энергию нужно тратить только на поддержание энергии электронов равной 1 ГэВ.

Синхротронное излучение существует в космосе. На прошлой лекции было рассказано про обнаружение линии $\lambda = 21$ ий гораздо больше.

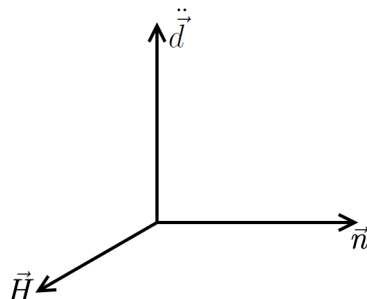


Рис. 14.8

Рассмотрим поляризацию синхротронного излучения. Поскольку

$$\vec{H} \sim [\ddot{\vec{d}}, \vec{n}],$$

то напряженность магнитного поля \vec{H} направлена перпендикулярно плоскости $\ddot{\vec{d}}\vec{n}$, а напряженность электрического поля \vec{E} лежит в этой плоскости (см. рис. 14.8).

Синхротронное излучение наблюдается при вспышках на Солнце: в этом случае возникают потоки заряженных частиц в магнитных полях Солнца. Синхротронное излучение наблюдается также в остаточном излучении от взрыва сверхновых. Это излучение позволяет получить важную информацию о сверхновых.

2. Реакция излучения

Пусть осциллятор излучает с интенсивностью

$$I = \frac{2}{3} \frac{|\ddot{\vec{d}}|^2}{c^3}.$$

Если к осциллятору не подводить энергию, то энергия теряется, следовательно

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{|\ddot{\vec{d}}|^2}{c^3}. \quad (14.18)$$

Осреднив левую часть этого выражения по промежутку времени, значительно большему чем период колебаний, получим следующее выражение:

$$\overline{|\ddot{\vec{d}}|^2} = \overline{\frac{d}{dt}(\dot{\vec{d}}\ddot{\vec{d}}) - \dot{\vec{d}} \cdot \ddot{\vec{d}}} \quad (14.19)$$

При отсутствии излучения осциллятор не затухал бы, что соответствует прямой (1). В нашем случае колебания затухающие, поэтому зависимость энергии от времени имеет вид (2) (см. рис. 14.9).

! Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

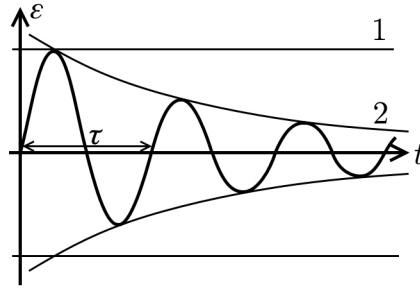


Рис. 14.9

Ранее было доказано, что среднее значение полной производной равно нулю, тогда выражение (14.19) примет вид:

$$|\ddot{\vec{d}}|^2 = -\dot{\vec{d}} \cdot \ddot{\vec{d}} = -e\dot{\vec{v}} \cdot \ddot{\vec{d}}, \quad (14.20)$$

так как

$$\dot{\vec{d}} = e\dot{\vec{r}} \Rightarrow \ddot{\vec{d}} = e\ddot{\vec{r}} = e\dot{\vec{v}}.$$

В этом случае можно сказать, что, согласно (14.18), энергия убывает по следующему закону:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \vec{f}_{p.m.} \cdot \dot{\vec{v}}, \quad \vec{f}_{p.m.} = \frac{2e\ddot{\vec{d}}}{3c^3},$$

где $\vec{f}_{p.m.}$ — сила радиационного трения.

С учетом выражения для дипольного момента (14.20), получим выражение для силы радиационного трения:

$$\vec{f}_{p.m.} = \frac{2e^2\ddot{\vec{r}}}{3c^3}. \quad (14.21)$$

Рассмотрим, как сила радиационного трения влияет на движение осциллятора, который испускает излучение. Без учета излучения уравнение движения осциллятора имеет вид:

$$m\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r}. \quad (14.22)$$

Обозначим

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2.$$

В этом случае уравнение (14.22) примет следующий вид:

$$\ddot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} = 0. \quad (14.23)$$

Уравнение (14.23) — уравнение свободных колебаний. Подстановка в правую часть уравнения (14.22) выражения для силы радиационного трения (14.21), во-первых, полностью меняет характер уравнения (14.23), поскольку $\ddot{\vec{r}}$ — производная более высокой степени, чем $\ddot{\vec{r}}$.

Во-вторых, подстановка члена, пропорционального $\ddot{\vec{r}}$ в (14.22) приведет к парадоксальному решению, поскольку с математической точки зрения произойдет превышение точности решения.



Выражение для силы радиационного трения было выведено в приближении, что время затухания велико по сравнению с периодом движения. Следовательно, $\ddot{\vec{r}}$ можно выразить, продифференцировав выражение (14.23) по времени. В этом случае

$$\ddot{\vec{r}} = -\omega_0^2 \dot{\vec{r}}.$$

Следовательно, выражение (14.22) примет вид:

$$m\ddot{\vec{r}} = -k\dot{\vec{r}} + \frac{2e^2}{3c^3}(-\omega_0^2 \dot{\vec{r}}). \quad (14.24)$$

Поделив левую и правую часть этого выражения на массу m и перенеся все члены в левую часть, получим:

$$\ddot{\vec{r}} + \gamma\dot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} = 0, \quad \gamma = \frac{2e^2\omega_0^2}{3mc^3}, \quad (14.25)$$

где γ — **величина затухания**.

Чтобы решение было математически верное необходимо, чтобы выражение для силы радиационного трения в уравнении (14.24) было по модулю значительно меньше, чем $k|\dot{\vec{r}}|$, то есть

$$\gamma\dot{\vec{r}} \ll \omega_0 \dot{\vec{r}} \Rightarrow \gamma\omega_0 \ll \omega_0^2. \quad (14.26)$$

Согласно выражению для величины затухания (14.25), получим

$$\frac{e^2\omega_0}{mc^3} \ll 1 \Rightarrow \frac{e^2}{mc^2} \ll \frac{c}{\omega_0}. \quad (14.27)$$

Выражение в правой части (14.27) можно записать следующим образом:

$$\frac{c}{\nu} = \frac{c}{2\pi\omega_0} = \lambda \Rightarrow \frac{c}{\omega_0} = \frac{\lambda}{2\pi} = |.$$

Вспомнив выражение для классического радиуса электрона (14.4), получим окончательный вид выражения (14.27):

$$r_0 \ll |. \quad (14.28)$$

Это условие есть не что иное, как выведенное ранее условие применимости классической электродинамики. При рассмотрении теории о полевом происхождении массы было получено, что классическая электродинамика неприменима на расстояниях, сравнимых с классическим радиусом электрона.

Следовательно, уравнение (14.25) применимо в той области, в которой применима классическая электродинамика.

Если бы осциллятор был незатухающий, существовала бы определенная частота осцилляций ω_0 . Рассмотрим, как должен был бы двигаться свободный осциллятор с учетом излучения.

Чтобы выкладки были не очень громоздкими, рассмотрим одномерное движение, тогда в уравнении (14.25) можно совершить замену

$$x \leftrightarrow \vec{r},$$

вследствие чего оно примет следующий вид:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (14.29)$$

Решение этого уравнения будет искать в следующем виде:

$$x = Ae^{-i\omega t}. \quad (14.30)$$

Подставляя это решение в уравнение (14.29), получим:

$$A(-\omega^2 - i\omega\gamma + \omega_0^2) = 0.$$

Следовательно, решая это квадратное уравнение относительно ω , получим частоту колебаний:

$$\omega = -\frac{i\gamma}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 + \frac{\gamma^2}{4}}. \quad (14.31)$$

Согласно условию (14.26), величиной γ^2 в подкоренном выражении можно пренебречь, поэтому выражение (14.31) примет вид:

$$\omega = -\frac{i\gamma}{2} \pm \omega_0.$$

В этом случае решение (14.30) примет следующий вид:

$$x = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin(\omega_0 t + \phi), \quad (14.32)$$

где ϕ — некоторая фаза.

Эта функция неперiodическая. Рассмотрим, какие частоты содержит (14.32). Раскладывая (14.32) в интеграл Фурье, сможем в таком случае вычислить амплитуды Фурье-преобразования.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\omega)e^{-i\omega t} d\omega \Rightarrow x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{i\omega t} dt \quad (14.33)$$

Вычисляя интеграл, увидим, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = 4\pi \int_0^{+\infty} |x(\omega)|^2 d\omega.$$

Общая энергия, которую излучает осциллятор, будет равна

$$\mathcal{E} = \int_0^{+\infty} I(t) dt, \quad I = \frac{2}{3} \frac{e^2 (\ddot{\vec{r}})^2}{c^3},$$

где, согласно (14.23), (14.32)

$$\ddot{\vec{r}} = -\omega_0^2 \vec{r} = -\omega_0^2 Ae^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin(\omega_0 t + \phi).$$

13 ! Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

Пусть колебания начинаются в момент времени $t = 0$ с нулевой фазой $\phi = 0$, тогда выражение (14.32) примет вид:

$$x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin(\omega_0 t).$$

Тогда, согласно (14.33),

$$x(\omega) \sim \int_0^{\infty} e^{i\omega t} e^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin \omega_0 t dt.$$

Синус можно представить в экспоненциальном виде следующим образом:

$$\sin \omega_0 t = \frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i},$$

поэтому

$$x(\omega) \sim \int_0^{\infty} e^{-\frac{\gamma}{2}t+i\omega t} (e^{-i\omega_0 t} - e^{i\omega_0 t}) \simeq \frac{e^{(-\frac{\gamma}{2}+i(\omega-\omega_0))t}}{-\frac{\gamma}{2} + i(\omega - \omega_0)} \Big|_0^{\infty} - \frac{e^{(-\frac{\gamma}{2}+i(\omega+\omega_0))t}}{-\frac{\gamma}{2} + i(\omega + \omega_0)} \Big|_0^{\infty}.$$

Для нахождения Фурье-коэффициентов второй производной дипольного момента, нужно вычислить значение следующего выражения:

$$\ddot{x}(\omega) = \omega_0^2 x(\omega), \quad \omega_0^2 = \text{const.}$$

Учитывая, что

$$e^{-\infty} = 0, \quad e^0 = 1,$$

получим

$$|\ddot{x}(\omega)| \sim \omega_0 \left(\frac{1}{(\omega - \omega_0) + \frac{i\gamma}{2}} + \frac{1}{(\omega + \omega_0) + \frac{i\gamma}{2}} \right) \quad (14.34)$$

Первое слагаемое в этом выражении обращается в бесконечность, когда его знаменатель обращается в ноль, то есть при условии $\omega = \omega_0$, а второе — при условии, что $\omega = -\omega_0$. Так как

$$|x(\omega)|^2 = |x(-\omega)|^2,$$

то вторым членом в выражении (14.34) можно пренебречь, поэтому при положительных частотах распределение интенсивности по частотам будет иметь следующий вид:

$$\frac{dI}{d\omega} \simeq \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}. \quad (14.35)$$

Вид этого распределения представлен на рисунке 14.10.

Найдем ширину резонансной кривой. Когда

$$\omega - \omega_0 = \pm \frac{\gamma}{2},$$

то, согласно (14.35), интенсивность падает в два раза.

! Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu



Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

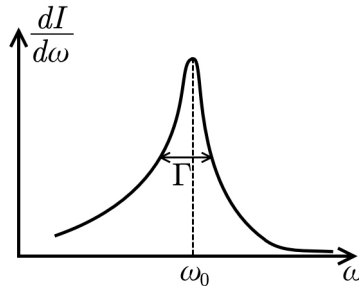


Рис. 14.10

Следовательно, полуширина спектральной линии

$$\frac{\Gamma}{2} = \frac{\gamma}{2} \Rightarrow \Gamma = \gamma,$$

где Γ — ширина спектральной линии.

С другой стороны, если закон движения осциллятора (14.32) экспоненциальный, то квадрат величины интенсивности существенно упадет (в e раз), когда

$$\Delta t \sim \frac{1}{\gamma} \Rightarrow \Gamma \cdot \Delta t \simeq 1, \quad (14.36)$$

то есть произведение ширины спектральной линии на время затухания осциллятора оказывается порядка 1.

Соотношение (14.36) выполняется и в квантовой механике. Этим соотношением пользуются для определения времени жизни короткоживущих частиц ($\Delta t \sim 10^{-23}$ с) по наблюдаемой ширине спектральной линии.

Если в газе в результате столкновения с частицами уменьшается время жизни осциллятора в возбужденном состоянии, то происходит уширение спектральных линий.

3. Рассеяние света на свободном электроне. Эффект Комптона. Не-применимость классической электродинамики в сильных полях

Рассмотрим рассеяние света на свободном электроне — Томсоновское рассеяние. Движение осциллятора в поле внешней электромагнитной волны имеет вид:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{eE(t)}{m}. \quad (14.37)$$

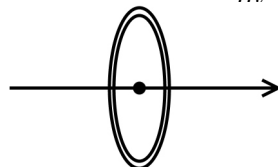


Рис. 14.11

Пусть электромагнитная волна действует на заряженную частицу, в результате чего частица начинает колебаться и, следовательно, излучать (см. рис. 14.11).



Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

! Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

В результате происходит рассеяние падающего света, величину рассеяния которого надо определить. В нерелятивистском случае внешнее магнитное поле пропорционально v/c , поэтому оно мало. Пусть

$$E = E_0 e^{-i\omega t}.$$

В этом случае уравнение (14.37) — уравнение вынужденных колебаний. Решение этого уравнения будем искать в виду

$$x = A e^{-i\omega t}.$$

Подставляя это решение в (14.37), получим

$$A(-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_0^2) = \frac{eE_0}{m}. \quad (14.38)$$

Предположим, что

$$\omega \gg \omega_0,$$

то есть частота падающего света значительно больше, чем собственная частота колебаний осциллятора.

В этом случае в выражении (14.38) можно пренебречь членами

$$\omega_0^2, \quad i\gamma\omega.$$

Следовательно, в левой части уравнения (14.37) остается только вторая производная по x :

$$\ddot{x} = \frac{eE(t)}{m}, \quad (14.39)$$

поэтому полная интенсивность рассеяния примет вид:

$$I = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} (\ddot{x})^2, \quad (14.40)$$

где \ddot{x} определяется из соотношения (14.39).

Таким образом в случае, когда внешнее излучение имеет частоту значительно большую, чем собственная частота колебаний, электрон, согласно (14.39), можно считать свободным.

Тогда выражение для интенсивности (14.40) примет вид:

$$I = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{e^2 E^2}{m^2}.$$

Отношение интенсивности этого излучения к падающей энергии носит название **эф-фективного сечения** σ .

$$\sigma = \frac{I}{S}, \quad S = \frac{E^2}{4\pi} c.$$

В этом случае эффективное сечение примет следующий вид:

$$\sigma = \frac{2e^4}{3c^3} \frac{E^2}{m^2} \frac{4\pi}{E^2 c} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} r_0^2. \quad (14.41)$$

! Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

В выражении (14.41) величина σ носит название **комптоновского сечения рассеяния**.

Эффективное сечение имеет размерность площади, так как

$$[I] = \frac{\text{эрг}}{\text{сек}}, \quad [S] = \frac{\text{эрг}}{\text{сек} \cdot \text{см}^2} \Rightarrow [\sigma] = \frac{[I]}{[S]} = \text{см}^2.$$

Следовательно, плоскую волну осциллятор рассеивает во все стороны. Таким образом, импульс волны передается осциллятору, следовательно, если в поле волны есть рассеивающий осциллятор, то на него в среднем будет действовать сила

$$\vec{f} = \frac{E^2}{4\pi} \sigma \vec{n}.$$

Сила \vec{f} для частицы в электромагнитной волне называется **силой радиационного трения**.

Когда внутри Солнца будут исчерпаны запасы термоядерного топлива в виде водорода, начнется горение гелия, в результате чего очень сильно повысится температура. Именно благодаря силе радиационного трения \vec{f} внешняя оболочка расширится до красного гиганта.

Получить силу \vec{f} можно было бы, осредняя силу радиационного трения в предположении, что

$$m\ddot{x} = eE.$$

Томсоновское рассеяние справедливо для не очень больших частот.

Эффект Комптона заключается в том, что длина волны излучения, рассеивающегося на свободных электронах, определяется следующим соотношением

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{2\pi\hbar}{mc}(1 - \cos\theta), \quad (14.42)$$

где θ — угол, под которым наблюдается рассеянное излучение.

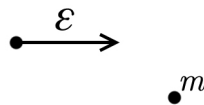


Рис. 14.12

Рассмотрим рассеяние релятивистской частицы, обладающей нулевой массой и энергией ε на покоящейся частице массой m (см. рис. 14.12).

В этом случае было показано, что

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{1 + \frac{\varepsilon}{mc^2}(1 - \cos\theta)}. \quad (14.43)$$

Если учесть, что в квантовой механике

$$\varepsilon = \hbar\omega,$$

17 ! Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

то выражение (14.43) переходит в (14.42) при условии, что

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = \frac{c}{\lambda}.$$

Формула (14.42) показывает, что для высоких частот, когда энергия кванта сравнима с собственной энергией электрона или когда длина волны

$$\lambda \sim \frac{\hbar}{mc},$$

нельзя пользоваться классической электродинамикой: свет нужно рассматривать как поток частиц с нулевой массой и энергией $\hbar\omega$.

Таким образом, предел применимости классической электродинамики — это не классический радиус электрона, который, согласно (14.4), равен

$$r_0 = \frac{e^2}{mc^2} \sim 3 \cdot 10^{-13} \text{ см},$$

а комптоновская длина волны

$$\lambda_e \approx \frac{\hbar}{mc} \simeq \frac{\hbar c}{e^2} r_0 = 137 \cdot r_0 \sim 4 \cdot 10^{-11} \text{ см}.$$

Еще одно ограничение классической электродинамики, которого пока не удалось достичь — сильные поля. В силы \vec{E} пока пока еще не проверялась.

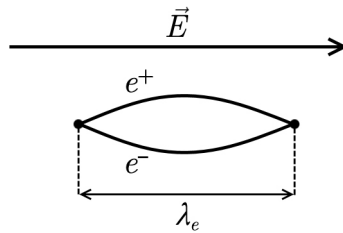


Рис. 14.13

Дело в том, что в сильных полях может быть осуществлен пробой вакуума: согласно квантовой механике, в вакууме могут возникать и исчезать электрон-позитронные пары e^+, e^- (см. рис. 14.13).

Электрон-позитронные пары «схлопываются» на расстояниях порядка комптоновской длины волны

$$\lambda_e = \frac{\hbar}{mc}.$$

Представим, что в вакууме существует электрическое поле \vec{E} . В этом случае на электроны и позитроны действуют противоположно направленные силы.

Для того, чтобы разорвать электрон-позитронную пару, величина действующего поля должна быть равна:

$$e \frac{\hbar}{mc} E \simeq mc^2 \Rightarrow E = \frac{mc^2}{e\lambda_e} = \frac{m^2 c^3}{e\hbar} \sim 10^{16} \frac{\text{В}}{\text{см}}.$$

В современных лазерах достигнуты поля на несколько порядков меньшие этой величины. С развитием лазерной техники в будущем появится возможность проверить справедливость электродинамики в сильных полях.

! Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu