ЛЕКЦИЯ 21

СКОБКИ ПУАССОНА. ТЕОРЕМА ЯКОБИ-ПУАССОНА. КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

1. Скобки Пуассона

На прошлой лекции вводилось понятие скобки Лагранжа. Это выражение было составлено из частных производных $2n$ функций ϕ_j, Ψ_j, $j = 1, \ldots, n$. Эти функции, в свою очередь, зависели от двух переменных x и y.

Теперь рассмотрим две функции u и v, зависящие от $2n$ переменных: $q_1, \ldots, q_n$, $p_1, \ldots, p_n$. Также они могут зависеть от параметра t. Составим такие определители:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial q_i} & \dfrac{\partial u}{\partial p_i} \\ \dfrac{\partial v}{\partial q_i} & \dfrac{\partial v}{\partial p_i} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial q_i}, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{21.1}$$

Составим сумму всех этих определителей:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial q_i} \right). \tag{21.2}$$

Выражение (21.2) называется **скобкой Пуассона** функций u и v. Будем обозначать её как (u, v).

Приведём примеры вычисления скобок Пуассона.

$$(q_i, q_k) = 0, \tag{21.3}$$

так как все производные по p_i и p_k, стоящие в выражении (21.2), равны нулю.

$$(p_i, p_k) = 0, \tag{21.4}$$

так как равны нулю все производные по q_i и q_k.

$$(q_i, p_k) = \delta_{ik}, \tag{21.5}$$

где δ_{ik} — символ Кронекера. Выражения (21.3), (21.4) и (21.5) называются **фундаментальными**, или **основными** скобками Пуассона.

Перечислим основные свойства скобок Пуассона. В их справедливости можно убедиться непосредственной проверкой.

1. **Линейность**
   Пусть c — либо константа, либо функция параметра t, тогда: $(u, cv) = c\,(u, v)$. Пусть w — функция тех же переменных, что и u и v, тогда:
   $(w, u + v) = (w, u) + (w, v)$.

2. **Кососимметричность**: $(u, v) = -(v, u)$.

3. $(u, u) = 0$.

4. $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial t} = \left(\dfrac{\partial u}{\partial t}, v\right) + \left(u, \dfrac{\partial v}{\partial t}\right)$.

5. Пусть w — функция переменных $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$, а c —постоянная,
   Тогда: $(w, c) = 0$.

6. **Тождество Лейбница**: $(w, u\,v) = (w, u)\,v + u\,(w, v)$.

7. Скобка Пуассона от сложной функции: $(w, u\,(v_1, \dots, v_k)) = \sum\limits_{l=1}^{k} \dfrac{\partial u}{\partial v_l}(w, v_l)$.

8. Пусть f — некоторая функция переменных Гамильтона q, p, t, тогда:
   $(q_i, f) = \dfrac{\partial f}{\partial p_i}$, $(p_i, f) = \dfrac{\partial f}{\partial q_i}$.

9. **Тождество Якоби**: $((u, v), w) + ((v, w), u) + ((w, u), v) = 0$.

Доказательство тождества Якоби требует длинных выкладок. Суть доказательства в том, что если расписать все скобки Пуассона по определению, то каждое слагаемое будет представлять собой произведение первых производных двух из этих функций на вторую производную третьей из них. Значит, нужно доказать, что все эти слагаемые взаимно уничтожаются. Покажем, например, что слагаемые со второй производной по u сокращаются:

$$((u, v), w) + ((w, u), v) = (w, (v, u)) - (v, (w, u))\,. \tag{21.6}$$

Отсюда видно, что слагаемые со вторыми производными по u уничтожаются.

Выпишем уравнения Гамильтона:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad i = 1, 2, \dots, n. \tag{21.7}$$

Применяя свойство 8, их можно переписать в симметричном виде с помощью скобок Пуассона:

$$\frac{dq_i}{dt} = (q_i, H), \qquad \frac{dp_i}{dt} = (p_i, H). \tag{21.8}$$

Определение 58: *Функции u и v* ***находятся в инволюции****, если их скобка Пуассона (u, v) равна нулю.* ♣

Из тождества Якоби следует следующее утверждение: если как функция u, так и функция v находятся в инволюции с функцией w, то их скобка Пуассона тоже находится в инволюции с функцией w.

Введение скобок Пуассона оказалось более плодотворным, чем введение скобок Лагранжа. В физике и математике эти скобки встречаются весьма часто. Например, они применяются в теории возмущений и в квантовой механике (перестановочные соотношения Гейзенберга). В теоретической механике скобки Пуассона позволяют описывать динамические величины способом, независящим от системы координат. Также они очень важны при исследовании интегралов уравнений движения.

2. Теорема Якоби – Пуассона

Отвлечёмся от динамики и просто запишем такую систему m уравнений:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \dots, x_m, t), \qquad i = 1, \dots, m. \tag{21.9}$$

Определение 59: *Функция $f(x_1, \dots, x_m, t)$ называется* ***интегралом****, или* ***первым интегралом*** *системы уравнений (21.9), если она постоянна на траекториях этой системы.* ♣

Иными словами, на траекториях системы должно выполняться равенство $\dfrac{df}{dt} = 0$. Распишем полную производную по времени:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} X_i \frac{dx_i}{dt} = 0. \tag{21.10}$$

Выражение (21.10) — это необходимое и достаточное условие того, чтобы функция f была первым интегралом данной системы.

Интегралы очень полезны при исследовании систем уравнений, определяющих движение системы. Наличие n независимых интегралов позволяет понизить порядок системы на n единиц. Пусть известно m интегралов:

$$f_i(x_1, \dots, x_m) = c_i, \qquad i = 1, \dots, m. \tag{21.11}$$

Поясним, что означает независимость интегралов. Введём векторы $\vec{f} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_m \end{pmatrix}$, $\vec{x} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix}$. Производная вектора $\vec{f}$ по вектору $\vec{x}$ — это матрица, составленная из частных производных f_i по x_j:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} = \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_m)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{pmatrix}. \tag{21.12}$$

Интегралы (21.11) называются **независимыми**, если $\det\left\|\dfrac{\partial\vec{f}}{\partial\vec{x}}\right\| \neq 0$. Можно также сказать, что они независимы, если не существует такой функции $F(f_1, \dots, f_m)$, которая тождественно равна нулю при всех значениях $x_1, \dots, x_m$. Это свойство не обязано быть глобальным — важно, чтобы это выполнялось в окрестности определённой точки, для которой утверждается независимость интегралов.

Вернёмся к основному повествованию. Поскольку интегралы (21.11) независимы, то по теореме о неявной функции можно разрешить эти уравнения относительно аргументов x_i:

$$x_i = x_i(t, c_1, \dots, c_m), \qquad i = 1, \dots, m. \tag{21.13}$$

Система уравнений Гамильтона не произвольна, но имеет определённую структуру. Иногда наличие одного интеграла позволяет понизить её порядок на две единицы, как в случае наличия циклической координаты. Количество необходимо интегралов, чтобы система уравнений была интегрируема при любых начальных условиях, определяет теорема Лиувилля, которая будет изучаться на одной из следующих лекций.

Пусть система уравнений определяется уравнениями Гамильтона (23.1), функция Гамильтона системы $H = H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$. Перепишем условие (21.10) в терминах гамильтоновой динамики.

$$\frac{df}{dt} = 0, \tag{21.14}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt}\right) = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial f}{\partial t} + (f, H) = 0. \tag{21.15}$$

Итак, чтобы функция $f(x_1, \dots, x_m, t)$ была интегралом системы уравнений (23.1), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t} + (f, H) = 0.} \tag{21.16}$$

Теорема 29 (Теорема Якоби – Пуассона) Если f_1 и f_2 — интегралы системы уравнений Гамильтона, то их скобка Пуассона (f_1, f_2) постоянна на траекториях системы. $*$

Иногда эта теорема формулируется так: *скобка Пуассона от двух первых интегралов тоже является первым интегралом.* Однако нужно относиться к этому утверждению с осторожностью: может оказаться, что (f_1, f_2) равна числу, а число нельзя называть первым интегралом системы. Или же эта скобка Пуассона будет выражаться через f_1 и f_2, следовательно, не будет независимым первым интегралом.

Док-во: Раз функции f_1, f_2 — первые интегралы системы, то выполняются тождества

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + (f_1, H) = 0, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial t} + (f_2, H) = 0. \tag{21.17}$$

Требуется доказать, что

$$\frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial t} + ((f_1, f_2), H) = 0. \tag{21.18}$$

Воспользуемся свойством 4 скобок Пуассона:

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial t} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial t}, f_2\right) + \left(f_1, \frac{\partial f_2}{\partial t}\right). \tag{21.19}$$

С учётом этого можно переписать формулу (21.18) в виде

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}, f_2\right) + \left(f_1, \frac{\partial f_2}{\partial t}\right) + ((f_1, f_2), H) = 0. \tag{21.20}$$

Подставим в формулу (21.20) равенства (21.17):

$$-((f_1, H), f_2) - (f_1, (f_2, H)) + ((f_1, f_2), H) = 0, \tag{21.21}$$

$$((H, f_1), f_2) + ((f_2, H), f_1) + ((f_1, f_2), H) = 0. \tag{21.22}$$

Равенство (21.22) справедливо согласно тождеству Якоби. Следовательно, утверждение теоремы выполняется. ■

С первого взгляда кажется, что при помощи теоремы Якоби можно получать новые интегралы, зная только два из них. На самом деле таким путём новые интегралы не получаются, за исключением некоторых редких случаев.

Рассмотрим такой пример. Пусть функция Гамильтона не зависит от времени: $H = H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$. Тогда есть обобщённый интеграл энергии $h = \text{const}$. Пусть у системы также имеется также интеграл $f(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) = \text{const}$. Тогда $\dfrac{\partial f}{\partial t} = -(f, H)$. По теореме Якоби – Пуассона $(f, H) = \text{const}$ на траекториях системы. Следовательно, $\dfrac{\partial f}{\partial t} = \text{const}$. Если частные производные более высокого порядка от f по времени существуют, то они тоже равны нулю.

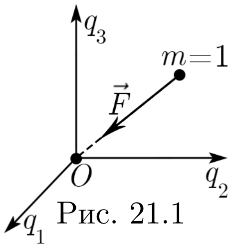

Рис. 21.1

Пусть материальная точка единичной массы движется в центральном силовом поле. Обозначим координаты точки как q_1, q_2 и q_3. Тогда $H = \dfrac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \Pi(r)$, где $r = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$. У системы есть интеграл движения

$$f_1 = q_2 p_3 - q_3 p_2 = \text{const}. \tag{21.23}$$

Это следствие закона сохранения кинетического момента. Так как $m = 1$, то $\vec{K} = \vec{[h]} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$. f_1 — это проекция кинетического момента на ось q_1. Аналогично, у системы есть интегралы

$$f_2 = q_3 p_1 - q_1 p_3 = \text{const}, \tag{21.24}$$

$$f_3 = q_1p_2 - q_2p_1 = \text{const}. \tag{21.25}$$

Убедиться в том, что это первые интегралы, можно, вычислив скобки Пуассона от этих функций с функций Гамильтона: (f_1, H), (f_2, H), (f_3, H). Все три скобки равны нулю (вычисления можно проделать в качестве упражнения).

Сделаем вид, будто неизвестно, является ли f_3 первым интегралом. Рассчитаем скобку (f_1, f_2):

$$(f_1, f_2) = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial f_1}{\partial q_i}\frac{\partial f_2}{\partial p_i} - \frac{\partial f_1}{\partial p_i}\frac{\partial f_2}{\partial q_i}\right) = q_1p_2 - q_2p_1 = f_3. \tag{21.26}$$

Значит, по теореме Якоби–Пуассона f_3 является первым интегралом.

Рассмотрим ещё один пример. Пусть система представляет собой одномерный осциллятор с единичной частотой. Её функция Гамильтона $H = \dfrac{1}{2}\left(q^2 + p^2\right)$. Проверим, что функция $f = q\sin t + p\cos t$ является первым интегралом.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (f, H) = q\cos t - p\sin t + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} = q\cos t - p\sin t + p\sin t - q\cos t = 0. \tag{21.27}$$

Следовательно, f действительно является интегралом. Как было вычислено в первом примере, частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ должна быть равна нулю, так как H не зависит от времени. Значит, $f_2 = \dfrac{\partial f}{\partial t} = q\cos t - p\sin t$ — тоже интеграл.

Вторая частная производная по времени от f равна $-f$, так что новый интеграл при этом не появляется. Так и должно было получиться, так как в силу размерности задачи решение может зависеть только от двух произвольных постоянных.

Получить новый интеграл с помощью скобок Пуассона — идея заманчивая, но в большинстве случаев безнадёжная. Как правило, если f_1 и f_2 получены из основных теорем динамики, таких как теоремы об изменении количества движения, кинетического момента и кинетической энергии, то новый интеграл вышеописанным способом получить не удаётся. Если же интеграл не вытекает из основным теорем динамики, а свойственен именно этой конкретной задаче, то можно надеяться получить новый интеграл, пользуясь теоремой Якоби–Пуассона. Например, в задаче трёх тел можно взять f_1 и f_2 — компоненты кинетического момента, и одну из компонент вектора Лапласа. Тогда через скобки Пуассона можно получить новый интеграл.

3. Канонические преобразования

Пусть имеется система дифференциальных уравнений в форме уравнений Гамильтона:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{21.28}$$

Функция Гамильтона этой системы $H = H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t)$. Уравнения (21.28) иногда могут быть легко проинтегрированы, если совершить подходящую замену переменных. Например, если в задаче двух тел уравнения записать в декартовых координатах, то циклической координата в них отсутствует, а если записать в полярных, то угол ϕ является циклической координатой, и можно понизить порядок системы уравнений на

2 единицы. Значит, для исследователя важно правильно подобрать обобщённые координаты.

Уравнения Лагранжа обладают свойством ковариантности: можно посчитать кинетическую и потенциальную энергию в одних обобщённых координатах и по известному алгоритму записать эти уравнения. В других обобщённых координатах уравнения могут быть другими, но алгоритм их получения тот же самый. Но в лагранжевой механике нет эффективного алгоритма для упрощения интегрирования системы уравнений. Иногда удаётся упростить вычисления, но в общем случае это сделать не получается.

В уравнениях Лагранжа q и t — переменные, а $\dot{q}$ получаются из самих уравнений. Но если считать независимыми переменные q и p и перейти к уравнениям Гамильтона, то, хотя количество независимых переменных увеличивается, траектории в фазовом пространстве становятся более наглядными, и расширяется класс возможных преобразований, которые позволяют упрощать уравнения. Здесь названия «координаты» и «импульсы» условны, потому что в фазовом пространстве эти понятия совершенно равноправны.

Рассмотрим простой пример. Пусть система имеет одну степень свободы, $H = H(q, p)$. Сделаем формальную замену переменных $q = -P$, $p = Q$. В новых переменных функция Гамильтона $\mathcal{H} = H(-P, Q)$, а уравнения Гамильтона выглядят так:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P}, \qquad \frac{dP}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q}. \tag{21.29}$$

Итак, уравнения (21.29) полностью эквиваленты исходным уравнениям, хотя координата и импульс поменялись ролями. Значит, в уравнениях Гамильтона понятия координаты и импульса достаточно условны. Это одна из причин, почему q и p называются **сопряжёнными**, или **канонически сопряжёнными** переменными.

В дальнейшем будем изучать замены переменных, которые позволяют упростить или создать основу для упрощения дифференциальных уравнений движения и, может быть, их последующего интегрирования. Для этого, прежде всего, удобно записать уравнения (21.28) в векторно-матричной форме. Введём $2n$-мерный вектор $\vec{x} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \vec{q} \\ \vec{p} \end{pmatrix}$. Тогда $H = H(\vec{x}, t)$. Систему уравнений Гамильтона (21.28) можно переписать так:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = JH_x^T, \tag{21.30}$$

где строка $H_x \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial q_1} & \dots & \dfrac{\partial H}{\partial q_n} & \dfrac{\partial H}{\partial p_1} & \dots & \dfrac{\partial H}{\partial p_n} \end{pmatrix}$, матрица $J \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}$. Матрица J обладает свойством $J^T = J^{-1} = -J$. Кроме того, $J^2 = -E_{2n}$, а $\det J = 1$.

Перейдём в фазовом пространстве q, p к новым переменным:

$$Q_i = Q_i\left(\vec{q}, \vec{p}, t\right), \qquad P_i = P_i\left(\vec{q}, \vec{p}, t\right), \qquad i = 1, 2, \dots, n. \tag{21.31}$$

Соотношения (23.3) тоже можно записать в векторной форме. Введём обозначение $\vec{y} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \vec{Q} \\ \vec{P} \end{pmatrix}$. Тогда замена переменных имеет вид

$$\vec{y} = \vec{y}(\vec{x}, t). \tag{21.32}$$

Будем считать что замена переменных обратима. Составим матрицу

$$M = \frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{x}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \vec{Q}}{\partial \vec{q}} & \dfrac{\partial \vec{Q}}{\partial \vec{p}} \\ \dfrac{\partial \vec{P}}{\partial \vec{q}} & \dfrac{\partial \vec{P}}{\partial \vec{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial Q_1}{\partial q_n} & \dfrac{\partial Q_1}{\partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial Q_1}{\partial p_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial Q_n}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial Q_n}{\partial q_n} & \dfrac{\partial Q_n}{\partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial Q_n}{\partial p_n} \\ \dfrac{\partial P_1}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial P_1}{\partial q_n} & \dfrac{\partial P_1}{\partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial P_1}{\partial p_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial P_n}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial P_n}{\partial q_n} & \dfrac{\partial P_n}{\partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial P_n}{\partial p_n} \end{pmatrix}. \tag{21.33}$$

Тогда обратимость замены переменных эквивалентна равенству $\det M \neq 0$. Обратное преобразование будет иметь вид

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{y}, t). \tag{21.34}$$

При этом матрица обратной замены $\dfrac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{y}}$ будет равна M^{-1}.

Необходимо найти, как будет выглядеть преобразованная система уравнений. Эти уравнения могут иметь гамильтонову форму, но могут и не иметь. Затем нужно научиться находить такие замены переменных, чтобы уравнения становились проще. Эти две задачи будут рассматриваться на следующей лекции.