ЛЕКЦИЯ 8

МОМЕНТ ИМПУЛЬСА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

На прошлом занятии были рассмотрены неупругие удары, в частности, реакции, которые идут с поглощением энергии. **Пороговая энергия** выражается следующей формулой:

$$K_{\text{пор}} = Q\left(1 + \frac{M}{m}\right).$$

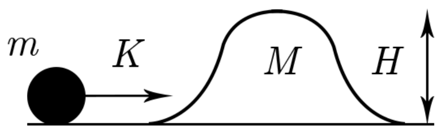

Рис. 8.1

Приведём простой для понимания пример. На горку массой M налетает частица массой m. Горка в начальный момент времени неподвижна, трение отсутствует. Какой должна быть кинетическая энергия налетающей частицы, чтобы преодолеть эту горку?

Когда частица взберётся на горку, в этот момент будет поглощена потенциальная энергия горки $Q = Mgh$. Значит, в этот критический момент частица будет ехать с одной скоростью вместе с горкой. Далее, если кинетическая энергия окажется больше пороговой, то частица преодолеет горку, если нет — не преодолеет.

Задача 4.98. Рассматривается ядерная реакция $^7\text{Li} + p \to {}^7\text{Be} + n$. Пороговая энергия: $E_{\text{пор}} = 1,88$ МэВ. Это означает, что такой минимальной кинетической энергией должен обладать протон, падающий на неподвижную литиевую мишень, чтобы вызвать ядерное превращение. При каких энергиях бомбардирующих протонов E_{p} нейтроны в такой реакции могут лететь назад от литиевой мишени?

Решение. Найдём величину поглощаемой энергии:

$$K_{\text{пор}} = Q\left(1 + \frac{m_{\text{p}}}{m_{\text{Li}}}\right) \Rightarrow Q = K_{\text{пор}}\frac{m_{\text{Li}}}{m_{\text{p}} + m_{\text{Li}}}.$$

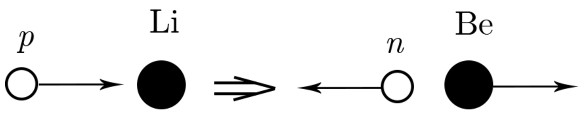

Рис. 8.2

Изобразим картину движения частиц:
С помощью механических законов сохранения опишем эту картину:

$$\begin{cases} P_{\text{p}} = P_{\text{Be}} - P_{\text{n}} \\ K_{\text{p}} = \dfrac{P_{\text{p}}^2}{2m_{\text{p}}} = Q + \dfrac{P_{\text{n}}^2}{2m_{\text{n}}} + \dfrac{P_{\text{Be}}^2}{2m_{\text{Be}}}. \end{cases}$$

Чтобы решить данную систему уравнений, необходимо ввести дополнительное условие. Рассмотрим пограничное состояние, когда нейтроны неподвижны в результате данной реакции. При больших значениях энергии налетающего протона начнут появляться нейтроны, летящие в обратную сторону.

Учитывая, что $P_{\text{n}} = 0$ при $K > K_{\text{p}}$, перепишем систему уравнений:

$$\begin{cases} P_{\text{p}} = P_{\text{Be}} \\ K_{\text{p}} = \dfrac{P_{\text{Be}}^2}{2m_{\text{p}}} + Q = \dfrac{P_{\text{p}}^2}{2m_{\text{Be}}} \cdot \dfrac{m_{\text{p}}}{m_{\text{p}}} + Q = K_{\text{p}} \dfrac{m_{\text{p}}}{m_{\text{Be}}} + Q. \end{cases}$$

$$K_{\text{p}} = Q \frac{m_{\text{Be}}}{m_{\text{Be}} - m_{\text{p}}} = K_{\text{пор}} \cdot \frac{m_{\text{Li}}}{m_{\text{p}} + m_{\text{Li}}} \cdot \frac{m_{\text{Be}}}{m_{\text{Be}} - m_{\text{p}}} = 1,88 \cdot \frac{7 \cdot 7}{8 \cdot 6} = \frac{49}{48} K_{\text{пор}} = 1,92 \text{ МэВ}.$$

Значит, если $K_{\text{p}} > 1,92$ МэВ, реакция произойдёт.

1. Момент импульса материальной точки. Законы вращения

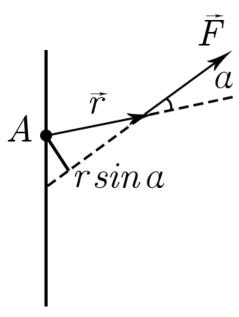

Рис. 8.3

Пусть на материальную точку с радиус-вектором r действует сила F под углом α. Тогда момент силы равен:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}].$$

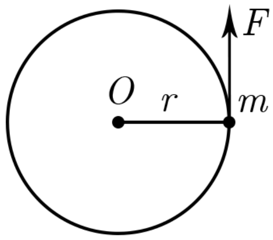

Рис. 8.4

Представим, что на окружности имеется материальная точка m, к которой по касательной приложена сила F, обеспечивающая ускоренное вращение этой точки по окружности.

$$ma_\tau = F; \quad a_\tau = \ddot{\phi} r; \quad v = \dot{\phi} r.$$

Отсюда следует:

$$m\ddot{\phi} r = F.$$

Для описания этого вращательного движения удобнее перейти к моментам сил. Домножаем уравнение на r:

$$mr^2\ddot{\phi} = Fr = M.$$

Величина mr^2 обозначается как I и называется **моментом инерции** этой точки вокруг оси вращения O. Таким образом, получаем **уравнение вращательного движения**:

$$I\ddot{\phi} = M.$$

Введём понятие **момента импульса**:

$$\vec{L} = [\vec{r}, m\vec{v}] \Rightarrow L = mr^2\phi = I\dot{\phi}.$$

Возьмём производную:

$$\frac{dL}{dt} = I\ddot{\phi} = M.$$

Данное уравнение является полным аналогом второго закона Ньютона, применённым к вращательному движению.

Сформулируем **закон сохранения момента импульса**: если на тело или систему тел не действуют внешние моменты сил, то она будет вращаться по инерции.

$$\text{Если } \sum M_i = 0, \text{ то } \vec{L} = \text{const}.$$

Задача 6.4. Длинная жёсткая доска может свободно вращаться вокруг оси, делящей её длину в соотношении 1:2. На длинный конец доски с высоты $h = 1,5$ м прыгает мальчик, масса которого $m = 40$ кг. На коротком плече стоит мужчина массой $M = 80$ кг. На какую высоту x подбросит доска мужчину после прыжка мальчика? Массой доски принебречь. Доска расположена невысоко над полом.

Решение. Обозначим скорость мальчика перед соприкосновением с доской как v_0. Скорость мальчика после взаимодействия — v_1. В момент соприкосновения мужчина, мальчик и доска составляют единую вращающуюся систему, угловая скорость этого вращения — ω. Перед взлётом скорость мужчины выражается как $\dfrac{v_1}{2}$.

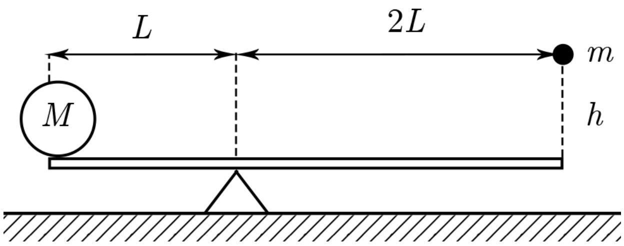

Рис. 8.5

Напишем закон сохранения момента импульса относительно точки O:

$$mv_0 \cdot 2l = mv_1 \cdot 2l + M\frac{v_1}{2}l;$$

$$v_1 = \frac{mv_0 \cdot 2l}{2lm + \frac{Ml}{2}} = ... = \frac{2}{3}v_0.$$

Пропуская элементарные преобразования, запишем:

$$v_0^2 = 2gh; \quad x = \frac{v_1^2}{8g}.$$

$$x = \frac{h}{g} = \frac{0,5}{3} \approx 0,17 \text{ м}.$$

Задача 6.15. Система из трёх одинаковых шариков A, B и C массами m лежит на абсолютно гладком столе. Шарики соединены и закреплены на невесомом стержне. Такой же шарик массой m абсолютно упруго сталкивается с шариком A со скоростью v_0. Какую угловую скорость приобретёт система ABC? Какую скорость приобретёт шарик B? Какую скорость приобретёт шарик D?

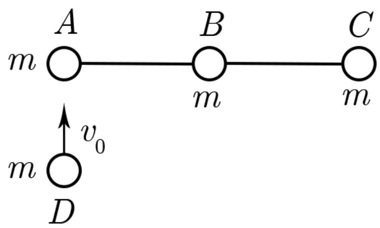

Рис. 8.6

Решение. Так как трения нет, задачу можно решить при помощи трёх законов сохранения.

Закон сохранения импульса:

$$mv_0 = 3mv_B - mv.$$

Закон сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{3mv_B^2}{2} + \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}.$$

Закон сохранения момента импульса:

$$mv_0 l = I\omega - mvl.$$

Учитывая, что $I = 2ml^2$, преобразуем и перепишем указанные выше соотношения в одну систему:

$$\begin{cases} v_0 + v = 3v_B \\ v_0^2 - v^2 = 3v_B^2 + 2l^2\omega^2 \\ v_0 + v = 2\omega l = 3v_B. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получим ответ:

$$\omega = \frac{6}{11}\frac{v_0}{l}; \quad v_B = \frac{4}{11}v_0; \quad v = \frac{v_0}{11}.$$

Задача 7.188. В верхних слоях атмосферы на спутник массой m действует сила сопротивления разреженного воздуха F. Увеличивается или уменьшается скорость спутника? Каково будет тангенциальное ускорение под воздействием этой силы? Как будет меняться скорость спутника по времени, если известно, что $F = -kv^2$?

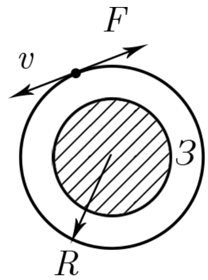

Рис. 8.7

Решение. Если тело лежит на поверхности Земли, то вес этого тела:

$$mg_0 = \frac{\gamma Mm}{R_З^2} \Rightarrow \gamma M = g_0 R_З^2.$$

Опишем вращательное движение спутника, где роль **центростремительной силы** выполняет сила тяготения:

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{\gamma Mm}{R^2} = \frac{mg_0 R_З^2}{R^2};$$

$$v^2 R = g_0 R_З^2 = \text{const}.$$

Продифференцируем полученное соотношение:

$$v^2 dR + 2vdvR = 0 \Rightarrow vdR = -2Rdv.$$

Запишем уравнение движения спутника на орбите:

$$\frac{dL}{dt} = -FR.$$

Но $L = Rmv$, тогда:

$$dL = mRdv + mvdR;$$

$$Rdv + vdR = -\frac{F}{m}Rdt;$$

$$Rdv - 2Rdv = -\frac{F}{m}Rdt;$$

$$dv = \frac{F}{m}dt;$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} > 0 \Rightarrow \text{скорость увеличивается.}$$

Таким образом,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} = \frac{kv^2}{m}.$$

Интегрируя, найдём:

$$v(t) = \frac{1}{\frac{1}{v_0} - \frac{k}{m}t}.$$

Задача 7.20. Планета движется вокруг Солнца по эллипсу. Не интегрируя уравнений движения, а пользуясь только законами сохранения, найти выражение для длины большой оси $2a$ этого эллипса.

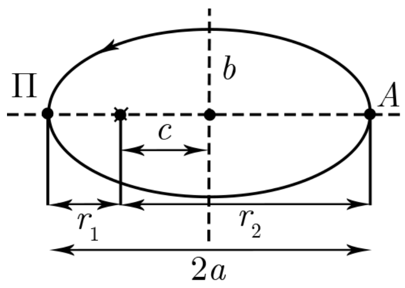

Рис. 8.8

Решение. Для **апогелия** и **перигелия** эллиптической орбиты запишем выражение момента импульса:

$$L = mvr \Rightarrow m^2v^2 = \frac{L^2}{r^2};$$

$$mv^2 = \frac{L^2}{mr^2}.$$

По закону сохранения энергии:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{\gamma Mm}{r} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\gamma Mm}{r}.$$

Отсюда следует:

$$r^2 + \frac{\gamma Mm}{E}r - \frac{L^2}{2mE} = 0.$$

Опираясь на теорему Виета, получим:

$$r_1 + r_2 = 2a = -\frac{\gamma Mm}{E} \Rightarrow a = -\frac{\gamma Mm}{2E};$$

$$r_1 r_2 = -\frac{L^2}{2mE}.$$

Опираясь на рисунок, заметим, что

$$r_1 = a - c, \quad r_2 = a + c; \quad r_1 r_2 = (a-c)(a+c) = a^2 - c^2 = b^2,$$

Тогда

$$b = \frac{L}{\sqrt{-2mE}}.$$

Запишем соотношения для частного случая данной задачи, круговой орбиты:

$$E = K + \Pi = -\frac{\gamma Mm}{R^2} = K - \frac{\gamma Mm}{R}; \quad K = -\frac{\Pi}{2}; \quad E = \frac{\Pi}{2}.$$

Задача 7.44. Со спутника, движущегося по круговой орбите со скоростью v_0, стреляют в направлении, составляющем угол 120° к курсу. Какой должна быть скорость пули относительно спутника, чтобы пуля ушла на бесконечность?

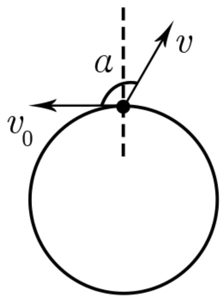

Рис. 8.9

Решение. Для того, чтобы пуля ушла на бесконечность, траектория должна быть параболической. При круговом движении:

$$\frac{mv_0^2}{R} = \frac{\gamma Mm}{R^2} \Rightarrow \frac{\gamma M}{R} = v_0^2.$$

Относительно Земли пуля будет иметь следующие составляющие скорости:

$$v_\phi = v_0 - v\sin 30^\circ = v_0 - \frac{v}{2};$$

$$v_r = v\cos\phi = \frac{\sqrt{3}}{2}v.$$

Когда пуля перешла на эллиптическую орбиту:

$$v_{\text{элл}}^2 = v_\phi^2 + v_r^2 = (v_0 - \frac{v}{2})^2 + \frac{3}{4}v^2 = v_0^2 - v_0 v + v^2.$$

Выражение для потенциальной энергии (здесь R — радиус орбиты спутника):

$$\Pi(R) = -\frac{\gamma M m}{R}.$$

По условию:

$$E = 0 = \frac{m v_{\text{элл}}^2}{2} - \frac{\gamma M m}{R} = \frac{m v_{\text{элл}}^2}{2} - m v_0^2.$$

Таким образом,

$$v_0^2 - v_0 v + v^2 - 2v_0^2 = 0.$$

Решая квадратное уравнение, получаем:

$$v^2 - v_0 v - v_0^2 = 0 \Rightarrow v = \frac{v_0}{2} \pm \sqrt{\frac{v_0^2}{4} + v_0^2} = \frac{v_0}{2}(1 + \sqrt{5}).$$