
ЛЕКЦИЯ 11

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ. ОПЫТЫ НА РЕЗОНАНС. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

1. Влияние сухого трения на колебания.

Рассмотрим колебания груза на пружине (см. рис. 11.1).

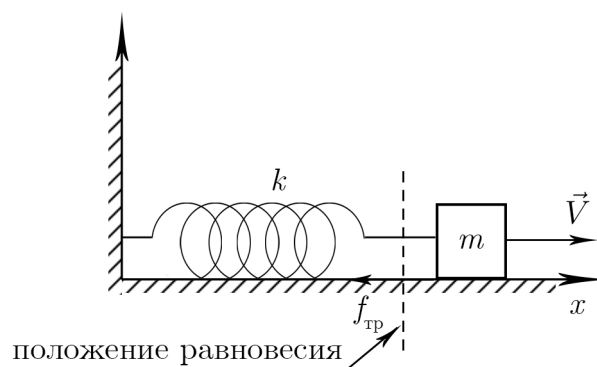


Рис. 11.1

Грузик массы m находится на столе, жесткость пружины k . На грузик со стороны стола действует сила трения. Допустим, грузик движется вправо, сила трения действует влево. Но после того, как грузик остановится и пойдет в обратную сторону, сила трения станет больше нуля (то есть будет сонаправлена с осью x), а скорость отрицательна.

Уравнение затухающих колебаний:

$$m\ddot{x} + kx = f_{\text{тр}},$$



Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

где $f_{\text{тр}}$ — сила трения.

$$f_{\text{тр}} = \begin{cases} -r, & V > 0, \\ +r, & V < 0. \end{cases}$$

$$m\ddot{x} + r \text{sign} \dot{x} + kx = 0.$$

Решение имеет вид (для случая $V > 0$):

$$m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = -r\dot{x}.$$

После интегрирования

$$\frac{mx^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = -rx + E_0.$$

Получили закон сохранения энергии, которая рассеивается ($-rx$).

$$K + \Pi = E_0 - rx$$

Вначале положение было x_1 . Потом положение x_2 , и т. д. (см. рис. 11.2) Найдется такая точка, из которой движение невозможно, так как сила трения превышает силы растянутой или сжатой пружины (на рис. сжатой), поэтому тело не уйдет в положение равновесия как с вязким трением, а останется в зоне застоя.

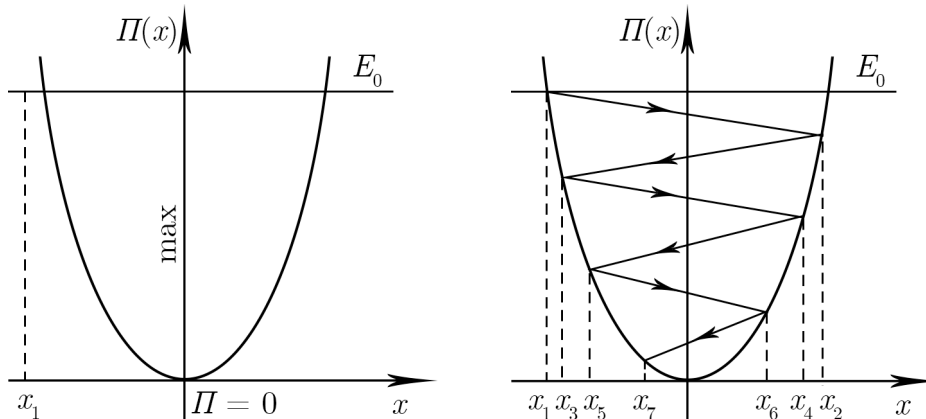


Рис. 11.2

2. Вынужденные колебания

Рассмотрим маятник на пружине, к грузику которого приложена синусоидальная внешняя сила (см. рис. 11.3)

$$F(t) = F_0 \cos \omega t.$$

Дифференциальное уравнение колебаний:

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$



Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

! Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

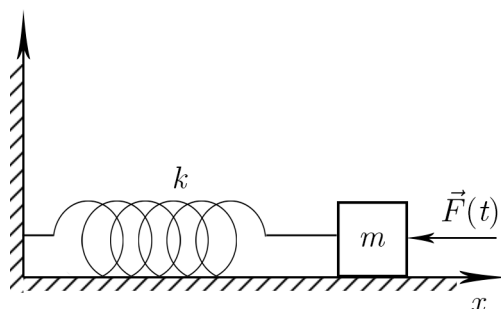


Рис. 11.3

Вынуждающая сила вызывает колебания. Приведем к каноническому виду

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t.$$

Колебания маятника будут с той же частотой, что и вынуждающая сила.

Решение полученного ДУ:

$$x(t) = A \cos \omega t,$$

$$\dot{x}(t) = -A\omega \sin \omega t,$$

$$\ddot{x}(t) = -A\omega^2 \cos \omega t.$$

Подставляем в ДУ:

$$-A\omega^2 \cos \omega t + \omega_0^2 A \cos \omega t = \frac{F_0}{m} \cos \omega t.$$

После преобразования получаем алгебраическое уравнение:

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Амплитуда колебаний существенным образом зависит от возмущающей силы.

Собственная частота колебаний — это частота, с которой колебалась бы система, если бы к ней не была приложена возмущающая сила F .

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

Когда $\omega \rightarrow \omega_0$, возникает увеличение амплитуды, называемое **резонансом**.

Частное решение полученного ДУ:

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t, \quad A(0) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}.$$

График изменения амплитуды от частоты, идеальный случай (без учета трения) показан на рис. 11.4.

Реальный график имеет смещенный влево максимум из-за силы трения (см. рис. 11.5).

! Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

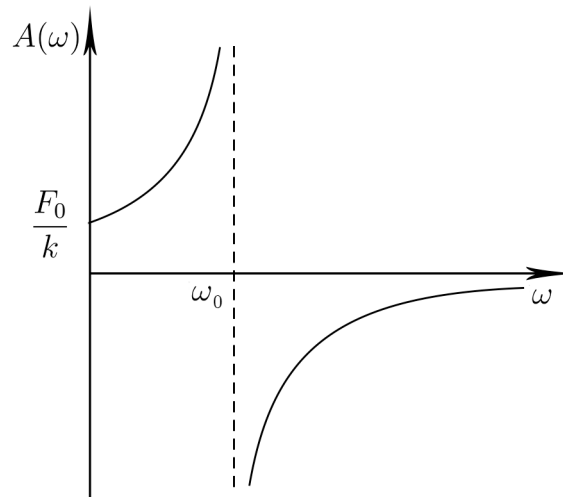


Рис. 11.4

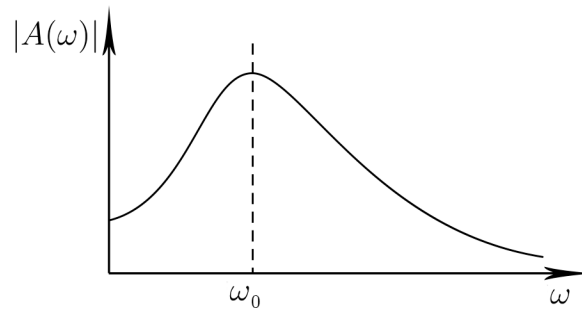


Рис. 11.5

Полное решение дифференциального уравнения:

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t).$$

Раскачивание колебаний из «0»:

$$t = 0, x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0.$$

При частотах $\omega \rightarrow \omega_0$ наступает биение; чем ближе к ω_0 , тем частота биения сильнее падает, амплитуда растет (см. рис. 11.6).

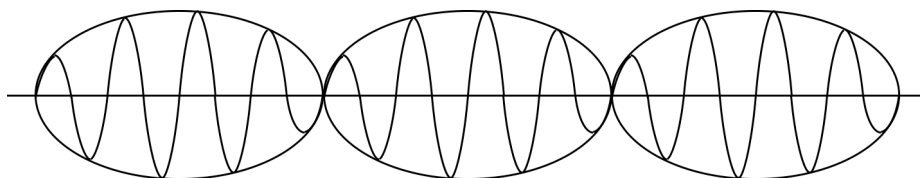


Рис. 11.6

$$x(t) \xrightarrow{\omega \rightarrow \omega_0} \frac{F_0}{m(\omega_0 + \omega)} \cdot \frac{(\cos \omega t - \cos \omega_0 t)}{(\omega_0 - \omega)} = \frac{F_0}{m(\omega_0 + \omega)} \cdot \frac{2 \sin \frac{\omega - \omega_0}{2} t}{(\omega_0 - \omega)} \rightarrow$$





*Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки.
Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.*

$$\rightarrow \frac{F_0}{m2\omega_0} t \sin \frac{\omega_0 + \omega}{2} t \rightarrow \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t$$



*Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой.
Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на
pulsar@phystech.edu*

Колебания без трения при выходе на резонансную частоту изображены на рис. 11.7.

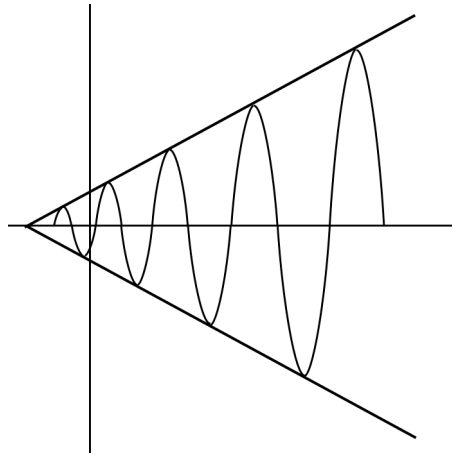


Рис. 11.7

Колебания с трением изображены на рис. 11.8.

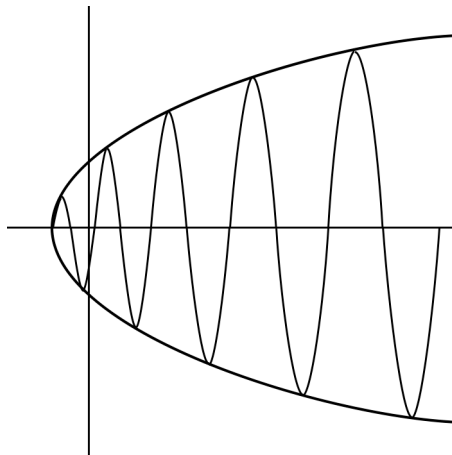


Рис. 11.8

Если частоты сильно отличаются, то график изображен на рис. 7.10.

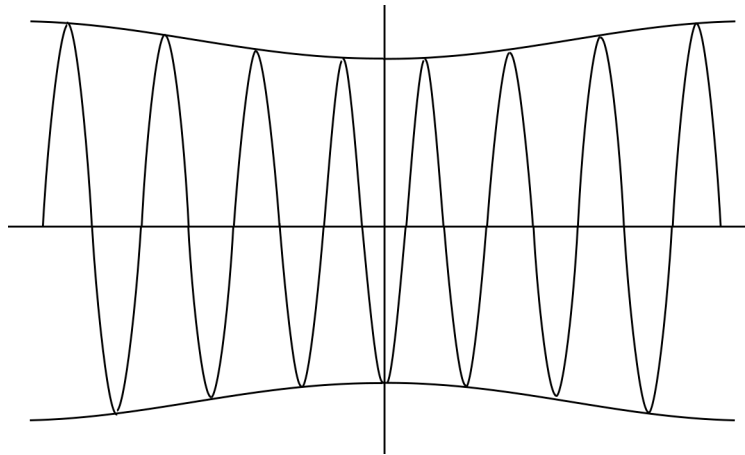


Рис. 11.9

3. Параметрические колебания

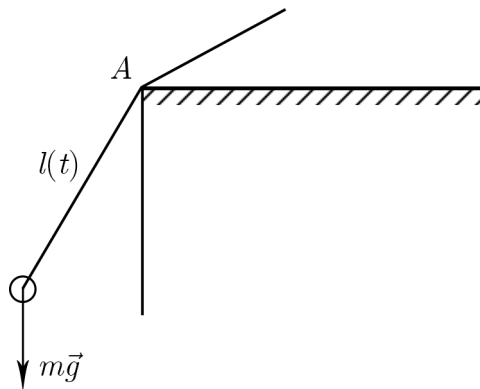


Рис. 11.10

Рассмотрим маятник, у которого можно менять длину нити, возбуждая при этом колебания (см. рис. 11.10). В крайней правой положении увеличиваем длину нити, опуская центр масс, в положении равновесия укорачиваем нить, в крайнем левом опять опускаем нить на длину h , в положении равновесия опять поднимаем, тем самым возбуждая колебания. Изменение длины считаем мгновенным.

$$L_A = ml^2\dot{\varphi},$$

$$M_A \approx -mgl\varphi.$$

Тогда уравнение колебаний имеет вид

$$\frac{dL_A}{dt} = ml^2\ddot{\varphi} + 2ml\dot{l}\dot{\varphi} + mgl\varphi = 0.$$

Приведем к каноническому виду

$$\ddot{\varphi} + \frac{2\dot{l}}{l}\dot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0.$$

Собственная частота колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

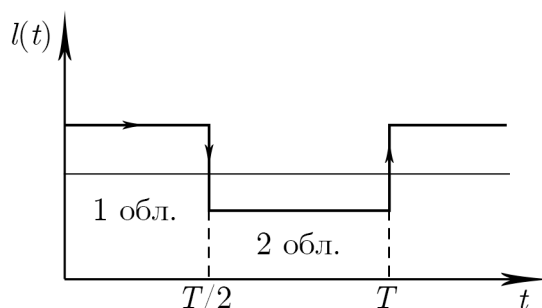


Рис. 11.11

$$l(t) = l_0 (1 + \varepsilon \text{sign} [\sin \omega t]).$$

В пределах конкретной области длина нити постоянна (см. рис. 11.11) ($\dot{l} = 0$). В этом случае ДУ колебаний принимает вид

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0, \quad \omega^2 = \frac{g}{l_0}.$$

Для 1-ой области

$$l = l_1 = l_0(1 + \varepsilon) \rightarrow \omega_{01} = \sqrt{\frac{g}{l_0(1 + \varepsilon)}} = \omega_0 \sqrt{\frac{1}{1 + \varepsilon}}.$$

Для 2-й области

$$l = l_2 = l_0(1 - \varepsilon) \rightarrow \omega_{01} = \sqrt{\frac{g}{l_0(1 - \varepsilon)}} = \omega_0 \sqrt{\frac{1}{1 - \varepsilon}}.$$

Функция φ непрерывна, $\dot{\varphi}$ претерпевает скачок.

Сохраняется момент импульса:

$$L = ml_1^2 \dot{\varphi}_1 = ml_2^2 \dot{\varphi}_2,$$

$$\dot{\varphi}_2 = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 \dot{\varphi}_1 = \left(\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}\right)^2 \dot{\varphi}_1.$$

Закон сохранения энергии:

1. Опускание справа налево:

$$mgl_1(1 - \cos \varphi_{01}) = \frac{m}{2} (l_1 \dot{\varphi}_1)^2,$$

$$\dot{\varphi}_1^2 = \frac{2g}{l_1} (1 - \cos \varphi_{01}).$$

! Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

2. Подъем справа налево:

$$\dot{\varphi}_2^2 = \frac{2g}{l_2} (1 - \cos \varphi_{02}),$$

$$\dot{\varphi}_1^2 = \frac{l_2^4}{l_1^4} \dot{\varphi}_2^2 = \frac{2g}{l_1} (1 - \cos \varphi_{02}) = \frac{l_2^4}{l_1^4} \frac{2g}{l_2} (1 - \cos \varphi_{02}).$$

После преобразования получаем инвариант:

$$l_2^3 (1 - \cos \varphi_{02}) = l_1^3 (1 - \cos \varphi_{01}) = \text{inv}.$$

Следовательно, происходит увеличение энергии, когда нить подтягивается: $\varphi_{01}, \varphi_{02}$ — абсциссы в момент изменения направления движения (см. рис. 11.12).

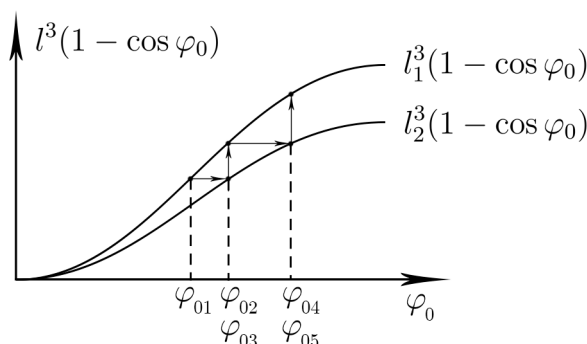


Рис. 11.12

В итоге, «подкачка» энергии, будет, где центр масс поднимается или опускается:

$$\Delta E_{\text{под}} = mgh + \frac{m}{2} (V_2^2 - V_1^2),$$

$$\Delta E_{\text{спуск}} = mgh \cos \varphi_{02},$$

$$\Delta E = \Delta E_{\text{под}} - \Delta E_{\text{спуск}} = kE_{01}.$$

Коэффициент k показывает, во сколько раз изменяется энергия при каждой итерации (полупериоде):

$$k = \frac{h}{l_2^3} (l_1^2 + l_1 l_2 + l_2^2) (1 - \cos \varphi_{01}).$$

! Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu