ЛЕКЦИЯ 29

ПРИНЦИП МОПЕРТЮИ-ЛАГРАНЖА. СОПОСТАВЛЕНИЕ ОПТИЧЕСКОГО ПРИНЦИПА ФЕРМА И ПРИНЦИПА МОПЕРТЮИ-ЛАГРАНЖА

1. Принцип Мопертюи – Лагранжа

Ранее в данном курсе был изучен принцип Гамильтона – Остроградского, который устанавливал необходимые и достаточные условия отбора движения системы на конечных интервалах времени. На систему накладывались условия голономности, но система не обязана была быть склерономной, то есть функция Лагранжа могла зависеть от времени. Впервые этот принцип был сформулирован Мопертюи, который накладывал условие консервативности.

Будем рассматривать консервативные или обобщенно-консервативные системы. Предположим, что функция Гамильтона зависит только от координат и импульсов:

$$H = H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n).$$

Тогда уравнения движения допускают интеграл энергии:

$$H = H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = h. \tag{29.1}$$

Рассматривается движение на фиксированном уровне энергии. Если

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} \neq 0, \tag{29.2}$$

то соотношение (29.1) можно разрешить относительно p_1:

$$p_1 = -K(q_1, \dots, q_n, p_2, \dots, p_n, h).$$

Тогда уравнения движения могут быть записаны в форме Гамильтона:

$$\frac{dq_j}{dq_1} = \frac{\partial K}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dq_1} = -\frac{\partial K}{\partial q_j}, \quad j = 2, \dots, n. \tag{29.3}$$

Уравнения (29.3) называются **уравнениями Уиттекера**. Они имеют вид уравнений Гамильтона, где роль функции Гамильтона играет функция K, а роль независимой переменной — координата q_1, сопряженная с p_1.

Если предположить, что

$$\det \left\| \frac{\partial^2 K}{\partial^2 p_i p_j} \right\|_{i,j=1}^2 \neq 0,$$

то можно сделать преобразование Лежандра и перейти к функции Лагранжа:

$$\mathcal{P} = \sum_{j=1}^{n} p_j q_j' - K, \quad \text{где } q_j' = \frac{dq_j}{dq_1}.$$

Вместо импульсов подставим их значения, полученные из первой группы уравнений Уиттекера. Тогда функция Якоби будет иметь следующие аргументы:

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(q_2, \dots, q_n, q_2', \dots, q_n', q_1, h).$$

Уравнения движения на фиксированном уровне энергии можно записать в следующем виде:

$$\frac{d}{dq_j}\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q_j'} - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q_j} = 0. \tag{29.4}$$

Если система консервативна, то $\mathcal{P}$ можно представить в следующем виде (здесь T — кинетическая энергия):

$$\mathcal{P} = \frac{2T}{\dot{q}_1}.$$

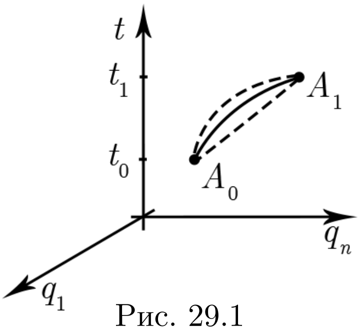

Рис. 29.1

В случае уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

рассматривалось расширенное координатное пространство, фиксировались точки, после чего через них прокладывался прямой путь, который соответствовал уравнению Лагранжа.

Если рассмотреть функцию $S = \int\limits_{t_0}^{t_1} L\,dt$, то уравнение Лагранжа эквивалентно следующему утверждению:

$$\boxed{\delta S = 0}$$

— действие по гамильтонову пути имеет стационарное значение в отличие от действия по окольным путям.

Воспользуемся аналогичным методом для уравнения Якоби (29.4). Введем действие по Лагранжу (вместо времени здесь фигурирует q_1):

$$w = \int\limits_{q_1^0}^{q_1^1} \mathcal{P}\,dq_1.$$

Изобразим координатное пространство (жирная линия соответствует прямому пути, а пунктирная — окольному):

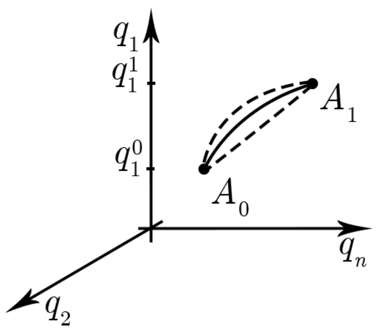

Рис. 29.2

Условия для путей:

1. Точки A_0 и A_1 фиксированы.

2. На прямом пути и на окольных путях один и тот же интеграл энергии.

Тогда уравнения Якоби (29.4) эквивалентны утверждению

$$\boxed{\delta w = 0}$$

— действие по Лагранжу на гамильтоновом пути имеет стационарное значение.

Время прохождения между этими точками не обязательно должно быть одним и тем же. Если на прямом пути нет сопряженного кинетического фокуса, то действие будет иметь минимум. Если кинетический фокус присутствует, то не будет ни минимума, ни максимума.

Случай консервативной системы (система склеромна, все силы потенциальны, потенциал не зависит от времени):

$$w = \int\limits_{q_1^0}^{q_1^1} \frac{2T}{\dot{q}_1}\, dq_1 = \int\limits_{t_0}^{t_1} 2T\, dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_\nu^2\, dt = \sum_{\nu=1}^{N} \int\limits_{S_\nu^0}^{S} m_\nu v_\nu\, dS_\nu$$

— для консервативной системы действие по Лагранжу равно сумме работ векторов количества движения материальных точек на соответствующих их перемещениях.

В качестве иллюстрации к этому утверждению рассмотрим абсолютно гладкую поверхность, по которой движется точка массой m.

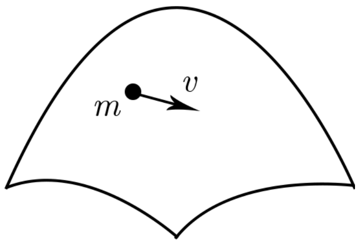

Рис. 29.3

Пусть потенциал $\Pi = 0$. Тогда $v = v_0 = \text{const}$. Для действия будет справедливо следующее выражение:

$$w = mv_0 l, \qquad \text{где } l \text{ — пройденный путь.}$$

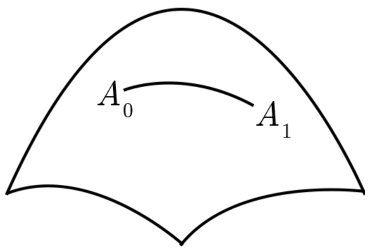

Рис. 29.4

Из принципа Мопертюи – Лагранжа следует, что $\delta l = 0$, то есть движение происходит по геодезической. Если начальная и конечная точка бесконечно близки, то путь будет представлять собой дугу кратчайшей длины.

2. Сопоставление оптического принципа Ферма и принципа Мопертюи – Лагранжа

Пусть v — скорость света в среде (не обязательно однородной), n — показатель преломления среды. Выражение для показателя преломления:

$$n = \frac{c}{v}.$$

Оптический принцип Ферма гласит, что *свет распространяется таким образом, что время его движения минимально.*

Время, которое проведет свет в пути из точки S_0 в точку S:

$$t = \frac{1}{c}\int\limits_{S_0}^{S} n\,dS.$$

Тогда принцип Ферма можно сформулировать в следующем виде:

$$\delta\int\limits_{S_0}^{S} n\,dS = 0.$$

Рассмотрим точку массой m, которая движется в потенциальном поле Π (система консервативна).

$$\frac{mv^2}{2} + \Pi = h.$$

Составляем действие по Лагранжу:

$$w = \int\limits_{S_0}^{S} m\,v\,dS.$$

Поскольку $v = \dfrac{1}{\sqrt{m}}\sqrt{2(h-\Pi)}$, то

$$w = \sqrt{m}\int\limits_{S_0}^{S} \sqrt{2(h-\Pi)}\,dS.$$

По принципу Мопертюи – Лагранжа

$$\delta\int\limits_{S_0}^{S} \sqrt{2(h-\Pi)}\,dS = 0.$$

Допустим, что показатель преломления имеет следующий вид (здесь a — некий размерный коэффициент): $n = a\sqrt{2(h-\Pi)}$. Принципы Ферма и Мопертюи – Лагранжа в этом случае совпадают.

$$\Pi = h - \frac{n}{2a^2},$$

то есть луч света и материальная точка ведут себя одинаково.

В качестве примера рассмотрим атмосферу, показатель которой меняется линейно с высотой:

$$n = n_0\left(1 - k\frac{z}{H}\right), \quad k \approx 1.$$

Потенциал:

$$\Pi = h - \frac{1}{2a^2}n_0^2\left(1 - k\frac{z}{H}\right)^2.$$

Будем считать, что $\dfrac{z}{H}$ — малая величина, т. е. ее квадратом можно пренебречь.

$$\Pi \approx (h - \frac{n_0^2}{2a^2}) + m\frac{n_0^2 k}{ma^2 H} z.$$

Траектория света будет параболой.

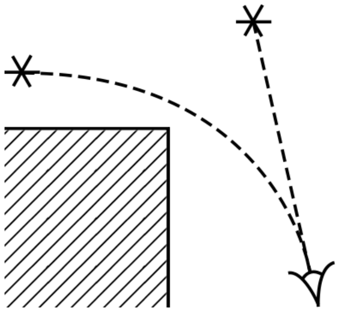

Рис. 29.5

Наблюдателю будет казаться, что источник света находится в другом месте. Такой моделью можно объяснить явление миража.